ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Συνδυαστική

Πειραιάς 2007

Μάθημα 8ο

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Το διωνυμικό θεώρημα μπορεί να αποτελέσει τη βάση για την απόδειξη μεγάλου αριθμού ταυτοτήτων οι οποίες περιλαμβάνουν διωνυμικούς συντελεστές.

$$(1+t)^{v}=\sum_{k=0}^{v}\binom{v}{k}t^{k},\ t\in \mathbf{R},\ v=0,1,\ldots.$$

$$(1+t)^{x}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{x}{k}t^{k},\ |t|<1,\ x\in \mathbf{R}$$

$$(1-t)^{-v}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{v+k-1}{k}t^{k},\ |t|<1,\ v=0,1,\ldots$$

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούμε…

I. Ταυτότητες που προκύπτουν απ' ευθείας από τους προηγούμενους τύπους για ειδικές τιμές της μεταβλητής t.

II. Ταυτότητες που προκύπτουν, κάνοντας αρχικά έναν ή περισσότερους μετασχηματισμούς στο τμήμα που περιέχει τους διωνυμικούς συντελεστές ώστε να προκύψει πιο εύχρηστο άθροισμα.

III. Ταυτότητες που προκύπτουν **παραγωγίζοντας** ή **ολοκληρώνοντας** και τα δύο μέλη του διωνυμικού αναπτύγματος ή άλλων ταυτοτήτων που έχουν προκύψει από αυτό.

$$(1+t)^{\nu} = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} t^k, \ t \in \mathbf{R}, \ \nu = 0,1,\ldots$$

Παράδειγμα 3.3.1

Να υπολογιστούν τα αθροίσματα

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k}, \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k \binom{\nu}{k}$$

και στη συνέχεια τα

$$S_3 = \sum_{r=0}^{\left[\frac{\nu-1}{2}\right]} \binom{\nu}{2r+1}, \qquad S_3' = \sum_{r=0}^{\left[\frac{\nu}{2}\right]} \binom{\nu}{2r}$$

Παράδειγμα 3.3.3

Αν r, ν είναι μη αρνητικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $r \leq$ ν να υπολογιστεί το άθροισμα

$$S = \sum_{k=r}^{\nu} \binom{\nu}{k} \binom{k}{r}.$$

Απάντηση

Μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι ισχύει

$$\binom{v}{k}\binom{k}{r}=\binom{v}{r}\binom{v-r}{k-r}$$

οπότε

$$S=\sum_{k=r}^{v}\binom{v}{r}\binom{v-r}{k-r}=\binom{v}{r}\sum_{k=r}^{v}\binom{v-r}{k-r}.$$

Εκτελώντας την αλλαγή μεταβλητής $k-r=j$, βρίσκουμε

$$S=\binom{v}{r}\sum_{j=0}^{v-r}\binom{v-r}{j}$$

$$\boxed{S_1=\binom{v}{0}+\binom{v}{1}+\binom{v}{2}+\ldots+\binom{v}{v}=\sum_{k=0}^{v}\binom{v}{k}=2^v.}$$

και έτσι καταλήγουμε στον τύπο

$$S=\binom{v}{r}2^{v-r}.$$

$$\sum_{k=r}^{v}\binom{v}{k}\binom{k}{r}=\binom{v}{r}2^{v-r}$$

Παράδειγμα 3.3.4

Αφού υπολογιστούν αρχικά τα αθροίσματα

$$S_4=\sum_{k=0}^{v}k\binom{v}{k}, \quad S_5=\sum_{k=0}^{v}\frac{1}{k+1}\binom{v}{k}$$

να υπολογιστούν στη συνέχεια τα

$$S_6=\sum_{k=0}^{v}\frac{k^2+k+10}{k+1}\binom{v}{k}, \qquad S_7=\sum_{k=1}^{v+1}\frac{1}{k}\binom{v}{k-1}$$

$$S_8=\sum_{k=1}^{v+1}\frac{\alpha k^2+\beta k+\gamma}{k}\binom{v}{k-1}$$

όπου α, β, γ δεδομένοι πραγματικοί αριθμοί.

Απάντηση

$$(1+t)^{\nu}=\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}t^{k},\ t\in\mathbf{R},\ \nu=0,1,\ldots.$$

Παραγωγίζοντας ως προς t βρίσκουμε

$$\nu(1+t)^{\nu-1}=\sum_{k=1}^{\nu}\binom{\nu}{k}kt^{k-1}$$

$$\mathbf{t=1}:\ S_4=\sum_{k=0}^{\nu}k\binom{\nu}{k}=\sum_{k=1}^{\nu}k\binom{\nu}{k}=\nu 2^{\nu-1}.$$

Ολοκληρώνοντας προς t από t = 0 έως t = 1, έχουμε

$$\int_0^1(1+t)^{\nu}\,dt=\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\int_0^1 t^{k}\,dt \Leftrightarrow \left[\frac{(1+t)^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_0^1=\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1$$

από όπου προκύπτει αμέσως ότι

$$S_5=\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{k+1}\binom{\nu}{k}=\frac{(1+1)^{\nu+1}-(1+0)^{\nu+1}}{\nu+1}=\frac{2^{\nu+1}-1}{\nu+1}.$$

Απάντηση

$$(1+t)^{\nu} = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} t^k, \quad t \in \mathbf{R}, \ \nu = 0,1,\ldots.$$

Εναλλακτικά: έχουμε $k\binom{\nu}{k} = \nu\binom{\nu-1}{k-1}$, $\qquad \frac{1}{k+1}\binom{\nu}{k} = \frac{1}{\nu+1}\binom{\nu+1}{k+1}$.

οπότε

$$S_4 = \sum_{k=0}^{\nu} k\binom{\nu}{k} = \sum_{k=1}^{\nu} k\binom{\nu}{k} = \sum_{k=1}^{\nu} \nu\binom{\nu-1}{k-1} = \nu\sum_{k=1}^{\nu}\binom{\nu-1}{k-1}$$

$$S_4 = \nu\sum_{r=0}^{\nu-1}\binom{\nu-1}{r} = \nu 2^{\nu-1}.$$

Όμοια

$$S_5 = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{1}{k+1}\binom{\nu}{k} = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{1}{\nu+1}\binom{\nu+1}{k+1} = \frac{1}{\nu+1}\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu+1}{k+1}$$

$$S_5 = \frac{1}{\nu+1}\sum_{r=1}^{\nu+1}\binom{\nu+1}{r} = \frac{1}{\nu+1}\left\{\sum_{r=0}^{\nu+1}\binom{\nu+1}{r} - \binom{\nu+1}{0}\right\} = \frac{1}{\nu+1}\left(2^{\nu+1}-1\right).$$

$$S_4=\sum_{k=0}^{v}k\binom{v}{k}, = v2^{v-1} \qquad S_5=\sum_{k=0}^{v}\frac{1}{k+1}\binom{v}{k}=\frac{2^{v+1}-1}{v+1}$$

$$S_6=\sum_{k=0}^{v}\frac{k^2+k+10}{k+1}\binom{v}{k}, \qquad S_7=\sum_{k=1}^{v+1}\frac{1}{k}\binom{v}{k-1}$$

Απάντηση

$$S_6=\sum_{k=0}^{v}\frac{k(k+1)+10}{k+1}\binom{v}{k}=\sum_{k=0}^{v}\left(k+\frac{10}{k+1}\right)\binom{v}{k}=\sum_{k=1}^{v}k\binom{v}{k}+10\sum_{k=1}^{v}\frac{1}{k+1}\binom{v}{k}$$

$$=S_4+10S_5=v\,2^{v-1}+10\cdot\frac{2^{v+1}-1}{v+1},$$

Για το S_7, αρκεί να θέσουμε $k-1=r$ οπότε θα πάρουμε

$$S_7=\sum_{r=0}^{v}\frac{1}{r+1}\binom{v}{r}=S_5=\frac{1}{v+1}\left(2^{v+1}-1\right).$$

$$S_4=\sum_{k=0}^{v} k\binom{v}{k},=v2^{v-1} \qquad S_5=\sum_{k=0}^{v}\frac{1}{k+1}\binom{v}{k}=\frac{2^{v+1}-1}{v+1}$$

$$S_6=\sum_{k=0}^{v}\frac{k^2+k+10}{k+1}\binom{v}{k}, \qquad S_7=\sum_{k=1}^{v+1}\frac{1}{k}\binom{v}{k-1}$$

Απάντηση

$$S_8=\sum_{k=1}^{v+1}\frac{\alpha k^2+\beta k+\gamma}{k}\binom{v}{k-1}=\sum_{k=1}^{v+1}\left(\alpha k+\beta+\gamma\cdot\frac{1}{k}\right)\binom{v}{k-1}=$$

$$=\alpha\sum_{k=1}^{v+1}k\binom{v}{k-1}+\beta\sum_{k=1}^{v+1}\binom{v}{k-1}+\gamma\sum_{k=1}^{v+1}\frac{1}{k}\binom{v}{k-1}$$

και εκτελώντας το μετασχηματισμό $k-1=r$ βρίσκουμε

$$S_8=\alpha\sum_{r=0}^{v}(r+1)\binom{v}{r}+\beta\sum_{r=0}^{v}\binom{v}{r}+\gamma\sum_{r=0}^{v}\frac{1}{r+1}\binom{v}{r}$$

$$=\alpha\left\{\sum_{r=0}^{v}r\binom{v}{r}+\sum_{r=0}^{v}\binom{v}{r}\right\}+\beta\sum_{r=0}^{v}\binom{v}{r}+\gamma\sum_{r=0}^{v}\frac{1}{r+1}\binom{v}{r}$$

$$=\alpha\sum_{r=0}^{v}r\binom{v}{r}+(\alpha+\beta)\sum_{r=0}^{v}\binom{v}{r}+\gamma\sum_{r=0}^{v}\frac{1}{r+1}\binom{v}{r}=$$

$$=\alpha\, S_4+(\alpha+\beta)\, S_1+\gamma\, S_5=\alpha v 2^{v-1}+(\alpha+\beta)2^{v}+\gamma\frac{2^{v+1}-1}{v+1}.$$

Πρόταση
(*Γινόμενο δύο σειρών*)

Αν α_k, β_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ είναι πραγματικοί αριθμοί και

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^k \qquad g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k t^k$$

τότε το γινόμενο $f(t)\, g(t)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $f(t)g(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu t^\nu$

όπου τα γ_ν, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ δίνονται από τους τύπους

$$\gamma_0 = \alpha_0\beta_0$$
$$\gamma_1 = \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0$$
$$\gamma_2 = \alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \gamma_2\alpha_0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\gamma_\nu = \alpha_0\beta_\nu + \alpha_1\beta_{\nu-1} + \ldots + \alpha_{\nu-1}\beta_1 + \alpha_\nu\beta_0$$

ή σε συνεπτυγμένη μορφή: $\gamma_\nu = \sum_{k=0}^{\nu} \alpha_k\beta_{\nu-k} = \sum_{k=0}^{\nu} \alpha_{\nu-k}\beta_k,\ \nu = 0,1,2\ldots$

Απόδειξη

$$f(t)\,g(t) = (\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots)(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \dots) \Rightarrow$$

t^0 : $\gamma_0 = \alpha_0\beta_0$,

t^1 : $\gamma_1 t = \alpha_0(\beta_1 t) + (\alpha_1 t)\beta_0 = (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)t \Rightarrow \gamma_1 = \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0$.

t^ν : $\alpha_0(\beta_\nu t^\nu) + (\alpha_1 t)(\beta_{\nu-1} t^{\nu-1}) + \dots + (\alpha_{\nu-1} t^{\nu-1})(\beta_1 t) + (\alpha_\nu t^\nu)\beta_0 =$

$= (\alpha_0\beta_\nu + \alpha_1\beta_{\nu-1} + \dots + \alpha_{\nu-1}\beta_1 + \alpha_0\beta_\nu)\, t^\nu$.

Άρα

$$\gamma_\nu = \alpha_0\beta_\nu + \alpha_1\beta_{\nu-1} + \dots + \alpha_{\nu-1}\beta_1 + \alpha_0\beta_\nu = \sum_{k=0}^{\nu} \alpha_k \beta_{\nu-k}.$$

Παρατηρήσεις

α. στην περίπτωση που τα αθροίσματα στις εκφράσεις των $f(t)$, $g(t)$ είναι πεπερασμένα, π.χ.

$$f(t)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k t^k,\quad g(t)=\sum_{k=0}^{m}\beta_k t^k$$

ισχύουν αντίστοιχοι τύποι. Πιο συγκεκριμένα,

$$f(t)g(t)=\sum_{v=0}^{n+m}\gamma_v t^v$$

ενώ τα γ_v, v = 0, 1, 2, ..., $n + m$ θα δίνονται από τους τύπους

$$\gamma_v=\sum_{k=0}^{\min(v,n)}\alpha_k\beta_{v-k}=\sum_{k=0}^{\min(v,m)}\alpha_{v-k}\beta_k,\quad v=0,1,\ldots,n+m.$$

β. στην περίπτωση που τα αθροίσματα στις εκφράσεις των $f(t)$, $g(t)$ είναι άπειρα, η μεταβλητή t θα θεωρείται ότι είναι περιορισμένη σε κατάλληλη περιοχή του μηδενός ($|t|<\varepsilon$ για κάποιο ε>0) έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η σύγκλιση των εμφανιζόμενων σειρών.

Πρόταση
(*τύπος του Cauchy*)

Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί και ν θετικός ακέραιος, τότε ισχύει

$$\binom{x+y}{\nu} = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{x}{k} \binom{y}{\nu - k}$$

Απόδειξη

$$(1+t)^{x+y} = (1+t)^x (1+t)^y \Rightarrow \sum_{v=0}^{\infty} \binom{x+y}{v} t^v = f(t)\, g(t)\,,\ |t|<1,$$

όπου

$$f(t) = (1+t)^x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x}{k} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\, t^k$$

$$g(t) = (1+t)^y = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{y}{k} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k\, t^k.$$

Επομένως

$$f(t)\, g(t) = \sum_{v=0}^{\infty} \gamma_v\, t^v$$

όπου $\gamma_v = \sum_{k=0}^{v} \alpha_k \beta_{v-k} = \sum_{k=0}^{v} \binom{x}{k}\binom{y}{v-k}.$

και θα έχουμε $\sum_{v=0}^{\infty} \binom{x+y}{v} t^v = f(t)\, g(t) = \sum_{v=0}^{\infty} \gamma_v t^v,\ |t|<1$ απ' όπου προκύπτει άμεσα το ζητούμενο.

Με βάση τις ταυτότητες

$$\binom{x+y}{\nu}=\frac{(x+y)_\nu}{\nu!},\ \binom{x}{k}=\frac{(x)_k}{k!},\qquad \binom{y}{\nu-k}=\frac{(y)_{\nu-k}}{(\nu-k)!}$$

ο τύπος του Cauchy παίρνει τη μορφή

$$\frac{(x+y)_\nu}{\nu!}=\sum_{k=0}^{\nu}\frac{(x)_k}{k!}\,\frac{(y)_{\nu-k}}{(\nu-k)!}$$

ή ισοδύναμα

$$(x+y)_\nu=\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}(x)_k\,(y)_{\nu-k}\,.$$

Αξίζει να προσεχτεί η ομοιότητα του τελευταίου τύπου με το διωνυμικό ανάπτυγμα

$$(x+y)^\nu=\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}x^k\,y^{\nu-k}.$$

Παράδειγμα 3.3.5

Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί και ν θετικός ακέραιος τότε

$$\begin{bmatrix} x+y \\ \nu \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{\nu} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \nu-k \end{bmatrix}$$

Απάντηση

$$\begin{bmatrix} x+y \\ v \end{bmatrix} = (-1)^v \binom{-(x+y)}{v} = (-1)^v \binom{-x-y}{v} =$$

$$= (-1)^v \sum_{k=0}^{v} \binom{-x}{k}\binom{-y}{v-k} = (-1)^v \sum_{k=0}^{v} (-1)^k \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} (-1)^{v-k} \begin{bmatrix} y \\ v-k \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{k=0}^{v} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v-k \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{matrix} x+y \\ v \end{matrix}\right] = \sum_{k=0}^{v} \left[\begin{matrix} x \\ v \end{matrix}\right] \left[\begin{matrix} y \\ v-k \end{matrix}\right]$$

Η προηγούμενη ταυτότητα, στην περίπτωση που τα x, y είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί, έστω m, n αντίστοιχα, παίρνει τη μορφή

$$\binom{m+n+v-1}{v} = \sum_{k=0}^{v} \binom{m+k-1}{k} \binom{n+v-k-1}{v-k}$$

ή ισοδύναμα

$$\binom{m+n+v-1}{m+n-1} = \sum_{k=0}^{v} \binom{m+k-1}{m-1} \binom{n+v-k-1}{n-1}.$$

Παράδειγμα 3.3.6

Να υπολογιστούν τα αθροίσματα

α. $$\sum_{k=0}^{v} \binom{v}{k}^2$$

β. $$\sum_{k=0}^{v} \binom{m+k-1}{k} \binom{m-k-1}{v-k}, \quad m > v$$

Απάντηση

α. $$\sum_{k=0}^{v}\binom{v}{k}^2=\sum_{k=0}^{v}\binom{v}{k}\binom{v}{k}=\sum_{k=0}^{v}\binom{v}{k}\binom{v}{v-k}$$

και εφαρμόζοντας τον τύπο του Cauchy βρίσκουμε

$$\sum_{k=0}^{v}\binom{v}{k}^2=\binom{v+v}{v}=\binom{2v}{v}.$$

β. Αρκεί να θέσουμε $n = m - v$ στην

$$\binom{m+n+v-1}{v}=\sum_{k=0}^{v}\binom{m+k-1}{k}\binom{n+v-k-1}{v-k}$$

Ασκήσεις (σελίδα 151)

1. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα

α. $\sum_{k=0}^{v} \binom{v}{k} 2^{v-k}$

β. $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{v+k-1}{k} \frac{1}{2^k}$

γ. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{v+k-1}{k} \frac{1}{2^{v+k}}$

δ. $\sum_{k=0}^{v} \binom{v}{k} t^{3k}\ s^{-2k}$

ε. $\sum_{k=2}^{v} k(k-1) \binom{v}{k}$

στ. $\sum_{k=2}^{v} (-1)^k k(k-1) \binom{v}{2}, \quad v > 2$

ζ. $\sum_{k=0}^{v} (2k+1) \binom{v}{k}$

η. $\sum_{k=2}^{v} k(k-2) \binom{v}{k}$

Ασκήσεις (σελίδα 151)

2. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα

α. $\sum_{k=1}^{\nu} \frac{\nu-k+1}{k}\binom{\nu}{k-1}$

γ. $\sum_{k=1}^{\nu} \frac{\nu-k+1}{k}(-1)^k\binom{\nu}{k-1}$

β. $\sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{1}{\nu-k}\binom{\nu-1}{k}$

δ. $\sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{(-1)^k}{\nu-k}\binom{\nu-1}{k}$

3. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα

α. $\sum_{r=1}^{\nu} \binom{\nu}{r}\binom{\nu-1}{r-1}$

γ. $\sum_{k=1}^{\nu} k^3\binom{\nu}{k}$

β. $\sum_{k=1}^{\nu-1} (\nu-k)^2\binom{\nu-1}{\nu-k}$

δ. $\sum_{k=1}^{\nu} k^4\binom{\nu}{k}$

Ασκήσεις (σελίδα 151)

4. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα

α. $\sum_{k=0}^{v-1}\binom{2v-1}{k}$

β. $\sum_{k=0}^{v}\binom{2v}{k}$

γ. $\sum_{k=}^{v}k\binom{2v}{k}$

δ. $\sum_{k=0}^{v}\binom{2v}{k}^2$

(Υπόδειξη: Διαπιστώστε αρχικά ότι ισχύει

α. $$\sum_{k=v}^{2v-1}\binom{2v-1}{k}=\sum_{k=0}^{v-1}\binom{2v-1}{k}$$

β. $$\sum_{k=v+1}^{2v}\binom{2v}{k}=\sum_{k=0}^{v}\binom{2v}{k}-\binom{2v}{v}$$

Ασκήσεις (σελίδα 152)

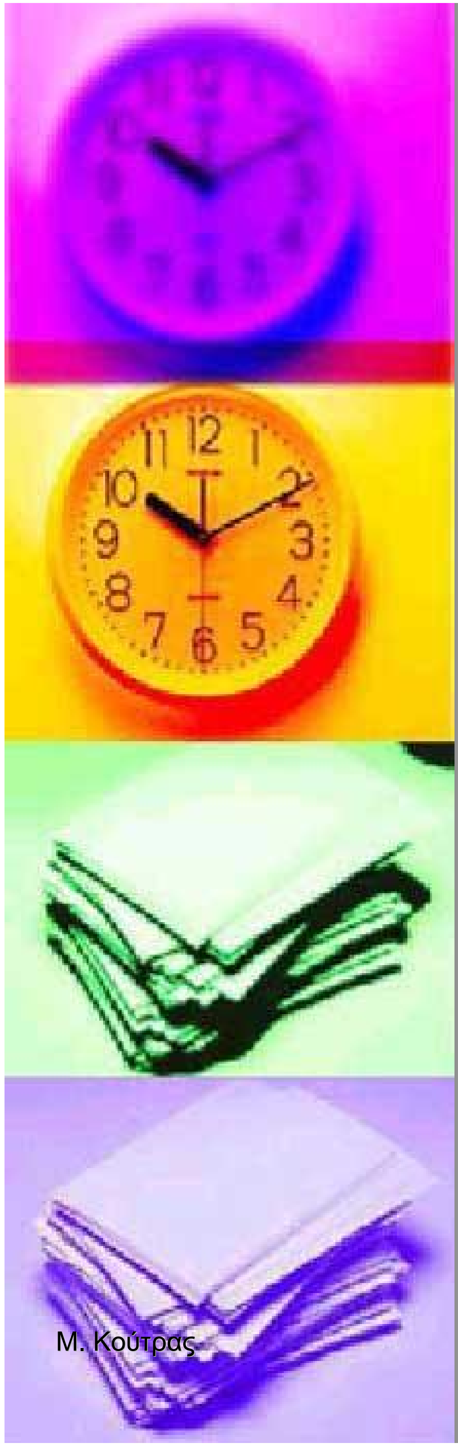
5. Αν ν, m, r είναι θετικοί ακέραιοι να δειχτεί ότι ισχύουν οι επόμενες ταυτότητες

α. $$\sum_{k=0}^{v}\binom{v}{k}^2\binom{k}{v-r}=\binom{v}{r}\binom{v+r}{r}, \quad (r\le v)$$

β. $$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{v}{k}\binom{r+k}{m+v}=\binom{r}{m}\binom{r}{v}, \quad r\ge m,v$$

γ. $$\sum_{k=0}^{v}\binom{v}{k}\binom{m+k}{v}=\sum_{k=0}^{v}\binom{v}{k}\binom{m}{k}2^k$$

δ. $$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{v}{k}\binom{m+v+r-k}{m+v}=\binom{r+m}{m}\binom{r+v}{v}.$$



Θέμα Εξετάσεων

α. Να δείξετε ότι ισχύει η ταυτότητα

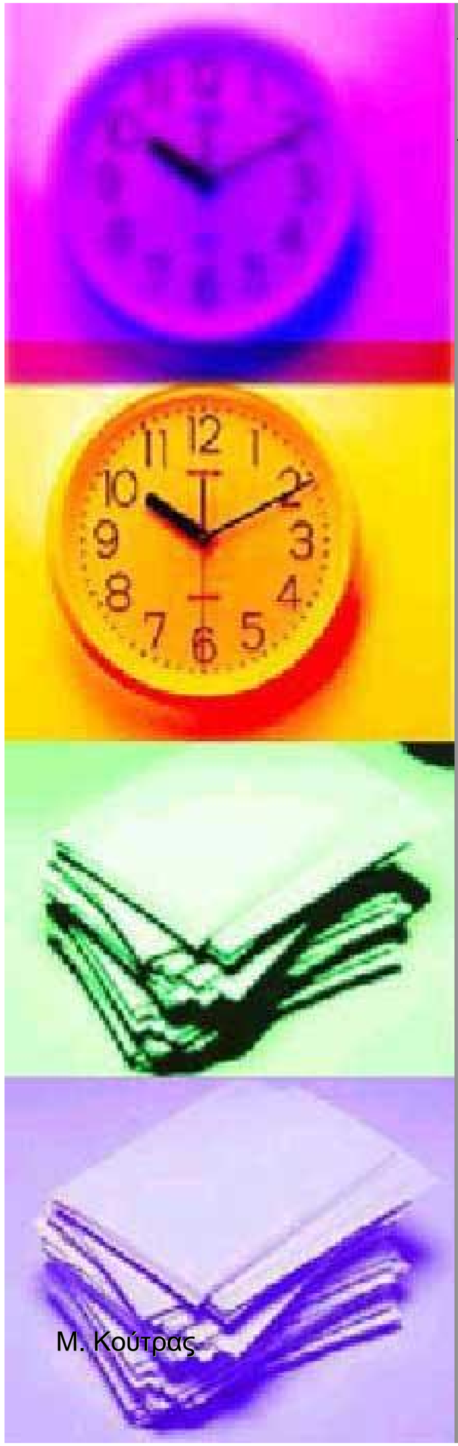
$$\frac{1}{k}\binom{m}{k-1}=\frac{1}{m+1}\binom{m+1}{k}$$

β. Να αποδειχτεί ότι

$$\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{k}\binom{m}{k-1}\binom{n}{\nu-k}=\frac{1}{m+1}\left[\binom{m+n+1}{\nu}-\binom{n}{\nu}\right]$$

γ. Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{k}\binom{\nu}{k-1}\binom{\nu}{k}$$



Θέμα Εξετάσεων

α. Να δείξετε ότι ισχύουν οι ταυτότητες

$$\binom{k}{2}\binom{v}{k}=\binom{v}{2}\binom{v-2}{k-2}, \qquad \binom{k}{3}\binom{v}{k}=\binom{v}{3}\binom{v-3}{k-3}.$$

β. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα

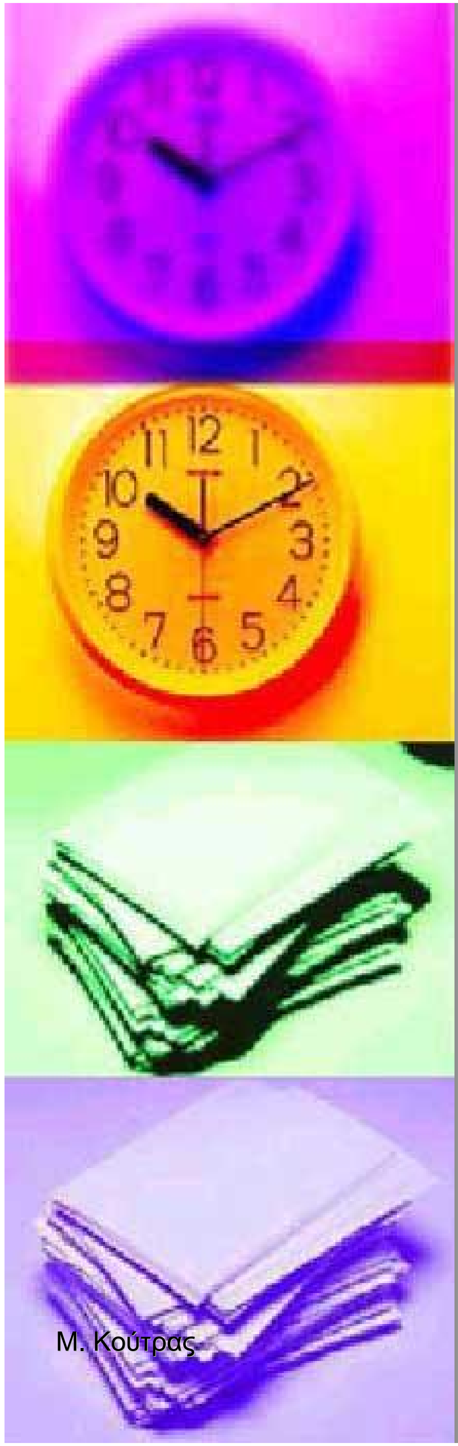
$$S_1=\sum_{k=2}^{\nu}\binom{k}{2}\binom{\nu}{k}, \qquad S_2=\sum_{k=3}^{\nu}\binom{k}{3}\binom{\nu}{k}$$

γ. Αφού πρώτα διαπιστώσετε ότι ισχύει η ταυτότητα

$$k(k-1)^2=2\binom{k}{2}+6\binom{k}{3}$$

να υπολογίσετε το άθροισμα

$$S_3=\sum_{k=1}^{\nu}k(k-1)^2\binom{\nu}{k}.$$



Θέμα Εξετάσεων

α. Να δείξετε ότι ισχύει η ταυτότητα

$$\frac{k+1}{\nu-k}\binom{\nu}{k+1}=\binom{\nu}{k}.$$

β. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα

$$S_1=\sum_{k=0}^{\nu-1}(-1)^k\,\frac{k+1}{\nu-k}\binom{\nu}{k+1},$$

$$S_2=\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{k+1}{\nu-k}\binom{\nu}{k+1}\binom{\nu}{k}$$

ΤΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Υπολογισμός του αναπτύγματος

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^\nu$$

όπου ν, k είναι θετικοί ακέραιοι με ν, k ≥ 2.

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^\nu = (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)\,(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)\ \ldots$$

$$\ldots\ (x_1 + x_2 + \ldots + x_k).$$

Εδώ θα παίρνουμε όρους της μορφής

$$x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_k^{r_k}$$

όπου

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_k = \nu.$$

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να πάρουμε τέτοιους (όμοιους) όρους; Για να δημιουργηθεί ο

$$x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_k^{r_k}$$

θα πρέπει:

- να διαλέξουμε r_1 από τις ν παρενθέσεις από όπου θα πάρουμε το σύμβολο x_1 (υπάρχουν $v_1 = \binom{v}{r_1}$ διαφορετικοί τρόποι επιλογής)
- από τις ν - r_1 αχρησιμοποίητες παρενθέσεις, να διαλέξουμε r_2 παρενθέσεις από όπου θα πάρουμε το σύμβολο x_2 (υπάρχουν $v_2 = \binom{v-r_1}{r_2}$ διαφορετικοί τρόποι επιλογής)
- από τις ν - r_1 - r_2 - ... - r_{k-1} = r_k αχρησιμοποίητες παρενθέσεις, να διαλέξουμε r_k παρενθέσεις από όπου θα πάρουμε το σύμβολο x_k (υπάρχουν

$$v_k = \binom{v - r_1 - r_2 - \ldots r_{k-1}}{r_k} = \binom{r_k}{r_k} = 1$$

τρόποι επιλογής)

Άρα οι συνολικοί τρόποι επιλογής που οδηγούν στο μονώνυμο $x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_k^{r_k}$ είναι (πολλαπλασιαστική αρχή),

$$\nu_1 \cdot \nu_2 \cdots \nu_k = \binom{\nu}{r_1}\binom{\nu-r_1}{r_2}\dots\binom{\nu-r_1-r_2-\dots-r_{k-1}}{r_k} =$$

$$= \frac{\nu!}{r_1!(\nu-r_1)!}\cdot\frac{(\nu-r_1)!}{r_2!(\nu-r_1-r_2)!}\ \dots\ \frac{(\nu-r_1-r_2-\dots r_{k-1})!}{r_k!((\nu-r_1-r_2-\dots-r_{k-1})-r_l}$$

$$= \frac{\nu!}{r_1!r_2!\dots r_k!} = \binom{\nu}{r_1,r_2,\dots,r_k}$$

Έτσι, το ανάπτυγμα της δύναμης $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^\nu$ θα αποτελείται από ένα άθροισμα όρων της μορφής

$$\binom{\nu}{r_1,r_2,\dots,r_k} x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_k^{r_k}$$

όπου τα $r_1, r_2, \dots, r_k$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι που ικανοποιούν τη σχέση

$$r_1 + r_2 + \dots + r_k = \nu.$$

Πρόταση (*Πολυωνυμικό θεώρημα*)

Έστω ν, k θετικοί ακέραιοι και $x_1, x_2, \ldots, x_k$ πραγματικοί αριθμοί. Τότε το ανάπτυγμα της ν-στής δύναμης του αθροίσματος $x_1 + x_2 + \ldots + x_k$ δίνεται από τον τύπο

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^{\nu} = \sum \frac{\nu!}{r_1!\, r_2! \ldots r_k!} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_k^{r_k}$$

όπου η άθροιση γίνεται για όλες τις k-άδες $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ μη αρνητικών ακέραιων οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_k = \nu.$$

Παράδειγμα 3.4.1

Να γραφεί η παράσταση

$$(x_1 + x_2 + x_3)^4$$

ως άθροισμα δυνάμεων των x_1, x_2 , x_3.

Απάντηση

Θα πρέπει αρχικά να βρούμε όλους τους μη αρνητικούς ακέραιους αριθμούς r_1, r_2, r_3 για τους οποίους ισχύει

$$r_1 + r_2 + r_3 = 4$$

και στη συνέχεια να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες τιμές των πολυωνυμικών συντελεστών από τον τύπο

$$\binom{4}{r_1, r_2, r_3} = \frac{4!}{r_1!\,r_2!\,r_3!}.$$

r_1	r_2	r_3	$\frac{4!}{r_1!r_2!r_3!}$	$x_1^{r_1}x_2^{r_2}x_3^{r_3}$
0	0	4	1	x_3^4
	1	3	4	$x_2x_3^3$
	2	2	6	$x_2^2x_3^2$
	3	1	4	$x_2^3x_3$
	4	0	1	x_2^4
1	0	3	4	$x_1x_3^3$
	1	2	12	$x_1x_2x_3^2$
	2	1	12	$x_1x_2^2x_3$
	3	0	4	$x_1x_2^3$
2	0	2	6	$x_1^2x_3^2$
	1	1	12	$x_1^2x_2x_3$
	2	0	6	$x_1^2x_2^2$
3	0	1	4	$x_1^3x_3$
	1	0	4	$x_1^3x_2$
4	0	0	1	x_1^4

:

$$(x_1+x_2+x_3)^4 = x_1^4 +$$

$$+4x_1^3x_2+4x_1^3x_3+$$

$$+6x_1^2x_2^2+12x_1^2x_2x_3+$$

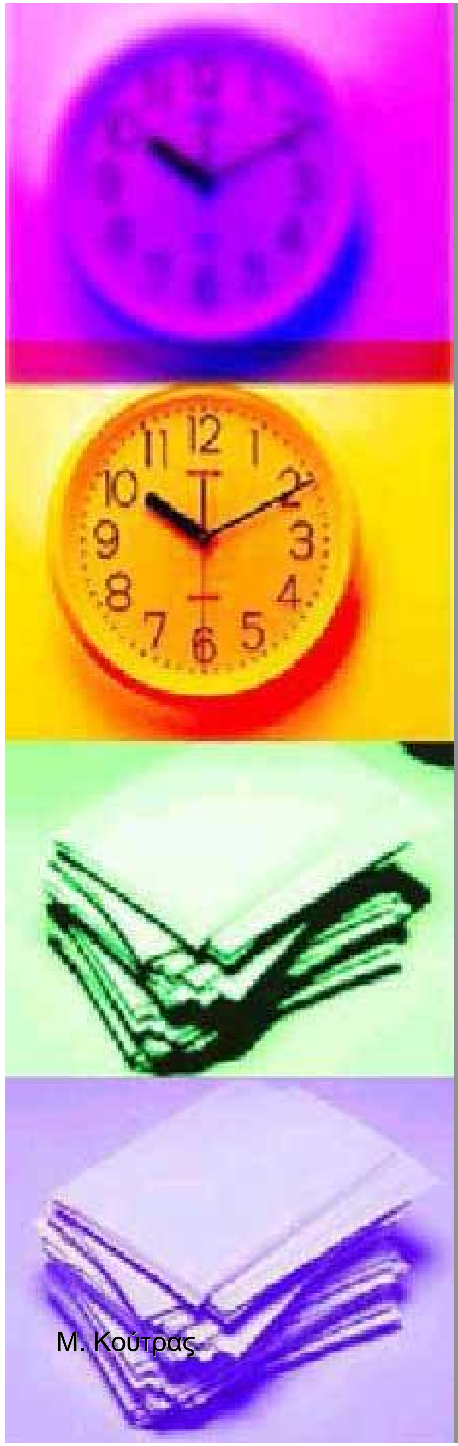
$$+6x_1^2x_3^2+4x_1x_2^3+$$

$$+12x_1x_2^2x_3+12x_1x_2x_3^2+$$

$$+4x_1x_3^3+x_2^4+$$

$$+4x_2^3x_3+6x_2^2x_3^2+$$

$$+4x_2x_3^3+x_3^4.$$



Θέμα Εξετάσεων

Μέρος ΙΙΙ (4 θέματα πλήρους ανάπτυξης. Μέγιστος αριθμός μονάδων=40)
Απαντήστε στα επόμενα θέματα αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας. Κάθε θέμα παίρνει 10 μονάδες. Μη χρησιμοποιήσετε περισσότερο χώρο από αυτόν που δίνεται σε κάθε θέμα.

1. Να βρεθεί ο συντελεστής του x^6 στο ανάπτυγμα της παράστασης $(1+x^2+x^3)^8$.

Λύση:

Θέλουμε να βρούμε το συντελεστή του x^6, στο ανάπτυγμα της παράστασης $(1+x^2+x^3)^8$.

Γνωρίζουμε ότι,

$$(1+x^2+x^3)^8 = \sum_{r_1,r_2,r_3} \frac{8!}{r_1!r_2!r_3!}(1)^{r_1}(x^2)^{r_2}(x^3)^{r_3} = \sum_{r_1,r_2,r_3} \frac{8!}{r_1!r_2!r_3!}\ x^{2r_2+3r_3}$$

όπου η άθροιση γίνεται για όλου τους μη αρνητικούς ακέραιους αριθμούς r_1, r_2, r_3, για τους οποίους ισχύει $r_1+r_2+r_3=8$. Επομένως, ζητάμε r_1, r_2, r_3 τέτοια ώστε,

$$r_1+r_2+r_3=8 \text{ και } 2r_2+3r_3=6.$$

Οπότε, για να ισχύουν οι δυο παραπάνω σχέσεις, πρέπει

$$r_1=6,\ r_2=0,\ r_3=2 \text{ ή } r_1=5,\ r_2=3,\ r_3=0.$$

Άρα ο συντελεστής του x^6 είναι,

$$\frac{8!}{6!\,0!\,2!}+\frac{8!}{5!\,3!\,0!}=28+56=84.$$

Ασκήσεις (σελίδα 158)

1. Να γραφεί αναλυτικά το πολυωνυμικό ανάπτυγμα των επόμενων παραστάσεων.

α. $(x_1 + x_2 + x_3)^2$

β. $(x_1 + x_2 + x_3)^3$

γ. $(x_1 - 2x_2 + 3x_3)^4$

δ. $(x_1 + x_2 - x_3)^5$

2. Να βρεθεί ο συντελεστής του x^5 στο πολυωνυμικό ανάπτυγμα της παράστασης

$$(1 + x + x^2)^8$$

3. Να βρεθεί ο συντελεστής x^{29} στο πολυωνυμικό ανάπτυγμα της παράστασης

$$(1 + x^5 + x^7 + x^9)^{1000}.$$

Ασκήσεις (σελίδα 149)

4. Αν ν, r_1, r_2 είναι μη αρνητικοί ακέραιοι για τους οποίους ισχύει $r_1 + r_2 = \nu$, να δειχτεί ότι

$$\binom{\nu}{r_1, r_2} = \binom{\nu - 1}{r_1 - 1, r_2} + \binom{\nu - 1}{r_1, r_2 - 1}.$$

5. Αν ν, k είναι μη αρνητικοί ακέραιοι με $k \geq 2$ να δειχτεί ότι

$$\sum \binom{\nu}{r_1, r_2, \ldots, r_k} = k^{\nu}$$

όπου η άθροιση γίνεται για όλες τις k-άδες (r_1, r_2, ..., r_k) μη αρνητικών ακεραίων με

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_k = \nu.$$