ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Σ υ ν δ υ α σ τ ι κ ή

Πειραιάς 2007

Μάθημα 5ο

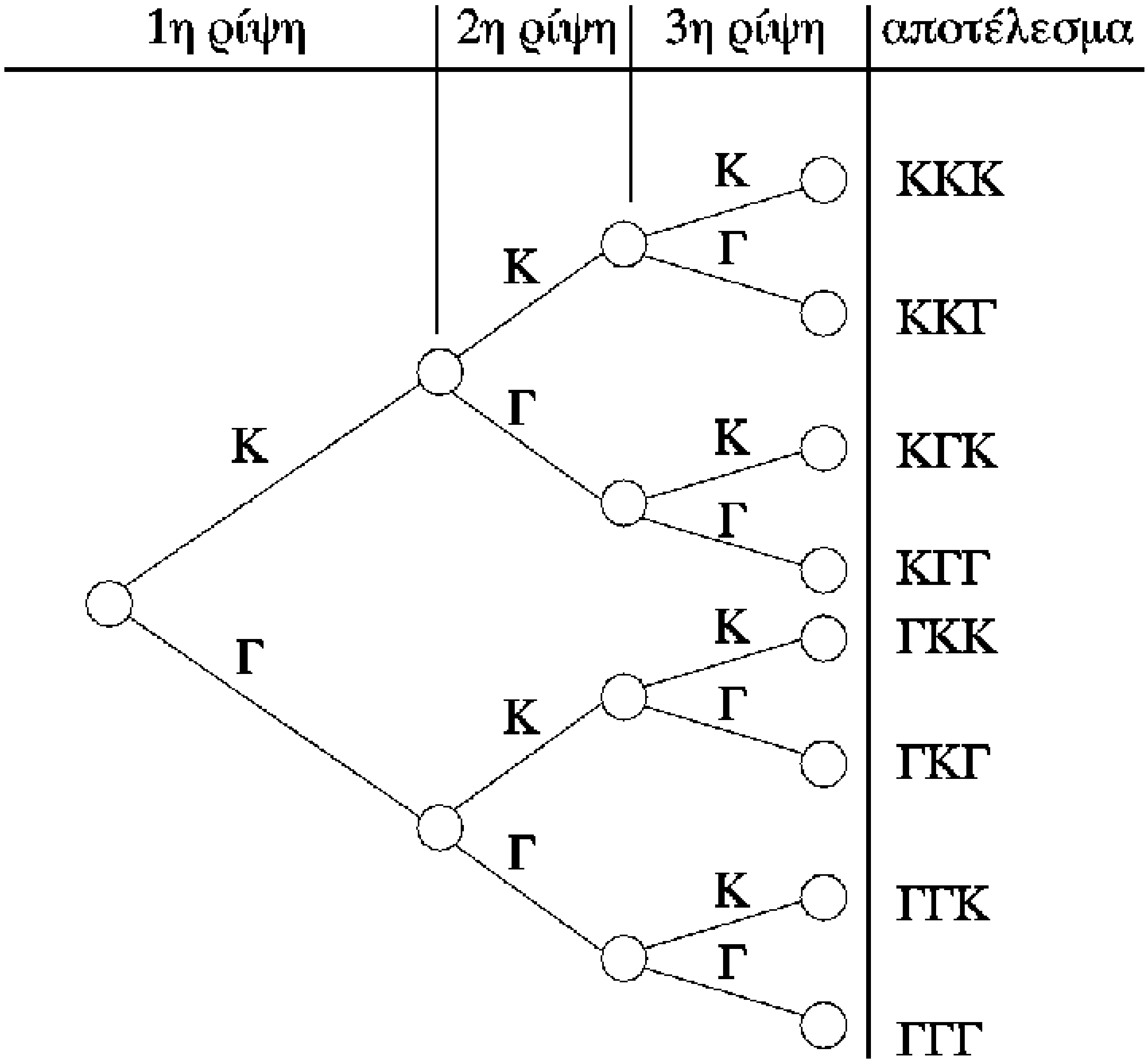
Σχηματισμοί όπου επιτρέπεται η επανάληψη στοιχείων

Παράδειγμα 2.4.1

Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα μπορούμε να πάρουμε ρίχνοντας ένα νόμισμα τρεις φορές;

Απάντηση

Τα αποτελέσματα είναι διατεταγμένες τριάδες της μορφής $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ όπου το α_i, $i = 1,2,3$ παριστάνει το αποτέλεσμα της i ρίψης, δηλαδή $\alpha_i \in \{K, \Gamma\}$. Είναι όμως φανερό ότι στην περίπτωση αυτή **δεν ισχύει** $\alpha_i \neq \alpha_j$ για $i \neq j$ αφού η εμφάνιση ενός συγκεκριμένου αποτελέσματος στην πρώτη ρίψη δεν αποκλείει την εμφάνιση του **ίδιου αποτελέσματος** σε κάποιες από τις επόμενες ρίψεις.


1η ρίψη
2η ρίψη
3η ρίψη
αποτέλεσμα
Κ
Γ
Κ
Γ
Κ
Γ
Κ
Γ
Κ
Γ
Κ
Γ
Κ
Γ
ΚΚΚ
ΚΚΓ
ΚΓΚ
ΚΓΓ
ΓΚΚ
ΓΚΓ
ΓΓΚ
ΓΓΓ

ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Έστω X= $\{x_1, x_2, \ldots, x_\nu\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο με ν στοιχεία και k ένας θετικός ακέραιος.

Διάταξη των ν στοιχείων του X με επανάληψη ή επαναληπτική διάταξη των ν στοιχείων ανά k ή απλά επαναληπτική διάταξη των ν και k, λέγεται κάθε διατεταγμένη k-αδα $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ η οποία αποτελείται από k στοιχεία του X, δηλαδή

$$\alpha_1 \in X, \alpha_2 \in X, \ldots, \alpha_k \in X.$$

Με άλλα λόγια, οι επαναληπτικές διατάξεις των ν στοιχείων ανά k είναι όλα τα στοιχεία του καρτεσιανού γινομένου $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ με $A_1 = A_2 = \ldots = A_k = X$.

Πρόταση

Ο αριθμός των επαναληπτικών διατάξεων των ν στοιχείων ανά k είναι ίσος με $ν^k$.

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας την πολλαπλασιαστική αρχή για καρτεσιανό γινόμενο συνόλων

Παράδειγμα 2.4.2

Ένας καθηγητής ζητάει από τους k φοιτητές που παρακολουθούν το μάθημά του να γράψουν την ημερομηνία γεννήσεώς τους σε ένα φύλλο χαρτί με αριθμημένες γραμμές (1, 2, ..., k).

α. Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα μπορούν να προκύψουν;

β. Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα θα προέκυπταν αν ήταν γνωστό ότι κανένας φοιτητής δεν έχει γενέθλια την ίδια ημέρα με κάποιον άλλο;

Θεωρήστε ότι το έτος έχει 365 ημέρες.

Απάντηση

Έστω $X=\{1,2,...,365\}$ το σύνολο όλων των ημερών του έτους όταν αυτές αντιστοιχηθούν σε διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς (έτσι, ο αριθμός 15 παριστάνει την 15/1, ο αριθμός 35 την 4/2 κ.ο.κ.).

α. Το σύνολο Ω των δυνατών αποτελεσμάτων είναι το

$$\Omega=\{(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu):\alpha_i\in X,\ i=1,2,...,k\}=X\times X\times...\times X.$$

Πιο συγκεκριμένα, το αποτέλεσμα $(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_k)$ αντιστοιχεί στην περίπτωση που ο πρώτος από τους k φοιτητές έχει γενέθλια την α_1 ημέρα του χρόνου, ο δεύτερος από τους k φοιτητές έχει γενέθλια την α_2 ημέρα του χρόνου κ.ο.κ. Άρα

$$|\Omega|=365^k.$$

β. Στην περίπτωση αυτή, το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων είναι το:

$$A=\{(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k):\alpha_i\in X,\ i=1,2,...,k \text{ και } \alpha_i\neq\alpha_j \text{ για } i\neq j\}$$

και αντιστοιχεί στις απλές διατάξεις των 365 στοιχείων του X ανά k. Άρα

$$|A|=(365)_k.$$

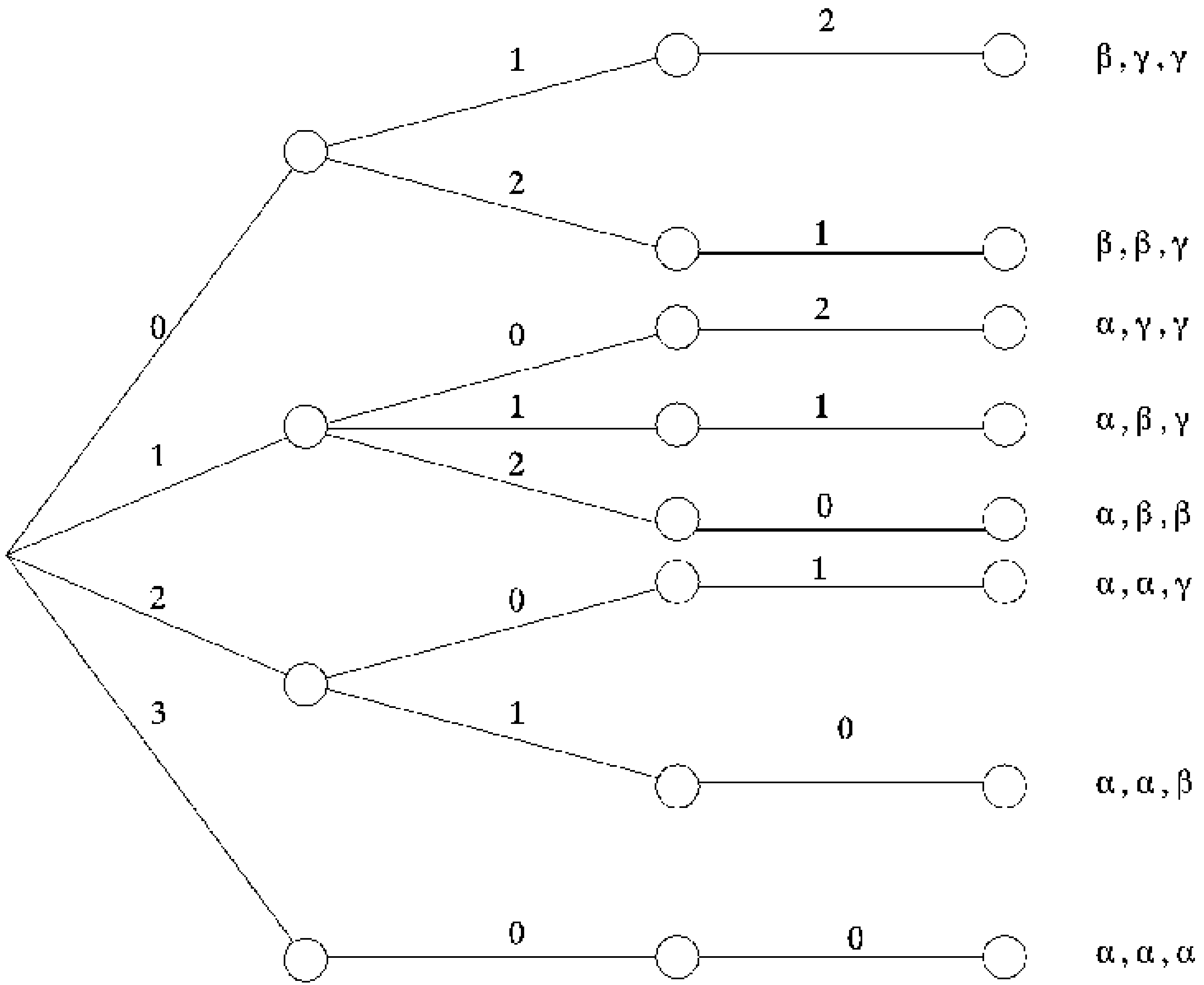
Επαναληπτικές διατάξεις με περιορισμούς

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι $X = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ και ότι ενδιαφερόμαστε για διατάξεις ανά $k = 3$ στις οποίες το στοιχείο α μπορεί να χρησιμοποιηθεί μέχρι 3 φορές, το β μέχρι 2 φορές και το γ μέχρι 2 φορές. Τυπικά παραδείγματα διατάξεων τέτοιου είδους είναι οι

$$(\alpha,\alpha,\alpha), (\alpha,\alpha,\beta), (\alpha,\beta,\alpha), (\alpha,\beta,\gamma), (\alpha,\beta,\beta) \text{ κ.ά.}$$

πλήθος από α | πλήθος από β | πλήθος από γ | Συνθεση



Σύνθεση	Διατάξεις	Πλήθος
β, γ, γ	(β, γ, γ), (γ, β, γ), (γ, γ, β)	3
β, β, γ	(β, β, γ), (β, γ, β), (γ, β, β)	3
α, γ, γ	(α, γ, γ), (γ, α, γ), (γ, γ, α)	3
α, β, γ	(α, β, γ), (α, γ, β), (β, α, γ), (γ, α, β), (β, γ, α), (γ, β, α)	6
α, β, β	(α, β, β), (β, α, β), (β, β, α)	3
α, α, γ	(α, α, γ), (α, γ, α), (γ, α, α)	3
α, α, β	(α, α, β), (α, β, α), (β, α, α)	3
α, α, α	(α, α, α)	1
Σύνολο		25

Μετάθεση των ν ειδών στοιχείων τύπου $r_1, r_2, \dots, r_\nu$

Έστω $X = \{x_1, x_2 \dots, x_\nu\}$ ένα σύνολο με $\nu \geq 2$ διαφορετικά στοιχεία $x_1, x_2, \dots, x_\nu$. Θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε

- το στοιχείο x_1 συνολικά r_1 φορές
- το στοιχείο x_2 συνολικά r_2 φορές

.

- το στοιχείο x_ν συνολικά r_ν φορές

και να δημιουργήσουμε όλες τις διατεταγμένες r-άδες

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \text{ με } \alpha_1 \in X, \alpha_2 \in X, \dots, \alpha_r \in X$$

όπου

$$r = r_1 + r_2 + \dots + r_\nu.$$

Μετάθεση των ν ειδών στοιχείων

τύπου $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$

Το συνολικό πλήθος των μεταθέσεων των ν ειδών στοιχείων τύπου $(r_1, r_2, ..., r_\nu)$, τους θα συμβολίζεται με

$$\binom{r}{r_1, r_2, ..., r_\nu}$$

Πολλές φορές θα χρησιμοποιούμε και την έκφραση «μετάθεση των ν ειδών στοιχείων εκ των οποίων τα r_1 είναι τύπου 1, τα r_2 είναι τύπου 2,…, τα r_ν είναι τύπου ν».

Παράδειγμα

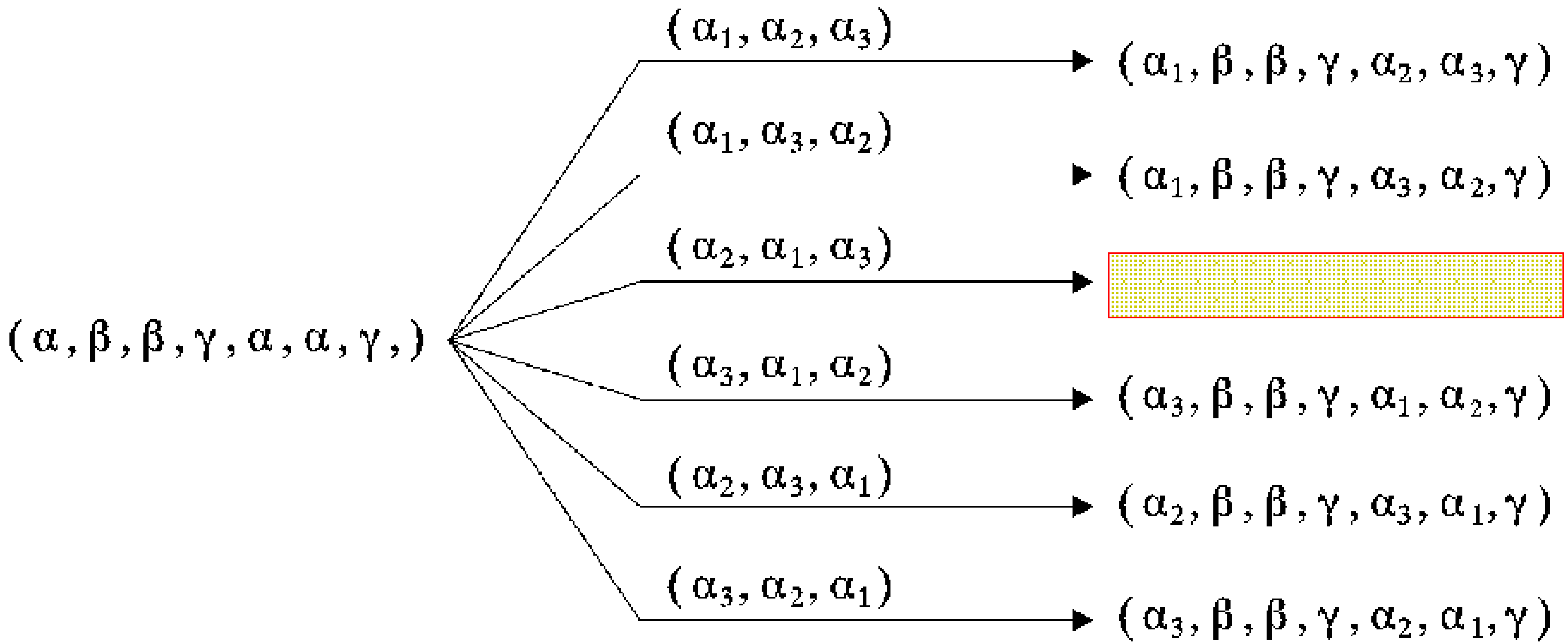
Ας υποθέσουμε ότι Χ={α,β,γ} και ότι ενδιαφερόμαστε για τις μεταθέσεις στις οποίες

- το στοιχείο α μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακριβώς 3 φορές,
- το β ακριβώς 2 φορές και
- το γ ακριβώς 2 φορές.

Στην περίπτωση αυτή μια τυπική διάταξη είναι η εξής

(α, β, β, γ, α, α, γ).

Ας φανταστούμε προσωρινά ότι τα τρία α είναι **διαφορετικά μεταξύ τους** και ας τα συμβολίσουμε με α_1, α_2, α_3. Κάνοντας όλες τις δυνατές μεταθέσεις των α_1, α_2, α_3 θα προκύψουν $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ διατάξεις


$(\alpha, \beta, \beta, \gamma, \alpha, \alpha, \gamma,)$
$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$
$(\alpha_1, \beta, \beta, \gamma, \alpha_2, \alpha_3, \gamma)$
$(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2)$
$(\alpha_1, \beta, \beta, \gamma, \alpha_3, \alpha_2, \gamma)$
$(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3)$
$(\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2)$
$(\alpha_3, \beta, \beta, \gamma, \alpha_1, \alpha_2, \gamma)$
$(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1)$
$(\alpha_2, \beta, \beta, \gamma, \alpha_3, \alpha_1, \gamma)$
$(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)$
$(\alpha_3, \beta, \beta, \gamma, \alpha_2, \alpha_1, \gamma)$

$$(\alpha_2, \beta, \beta, \gamma, \alpha_1, \alpha_3, \gamma) \xrightarrow{(\beta_1, \beta_2)} (\alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma, \alpha_1, \alpha_3, \gamma)$$

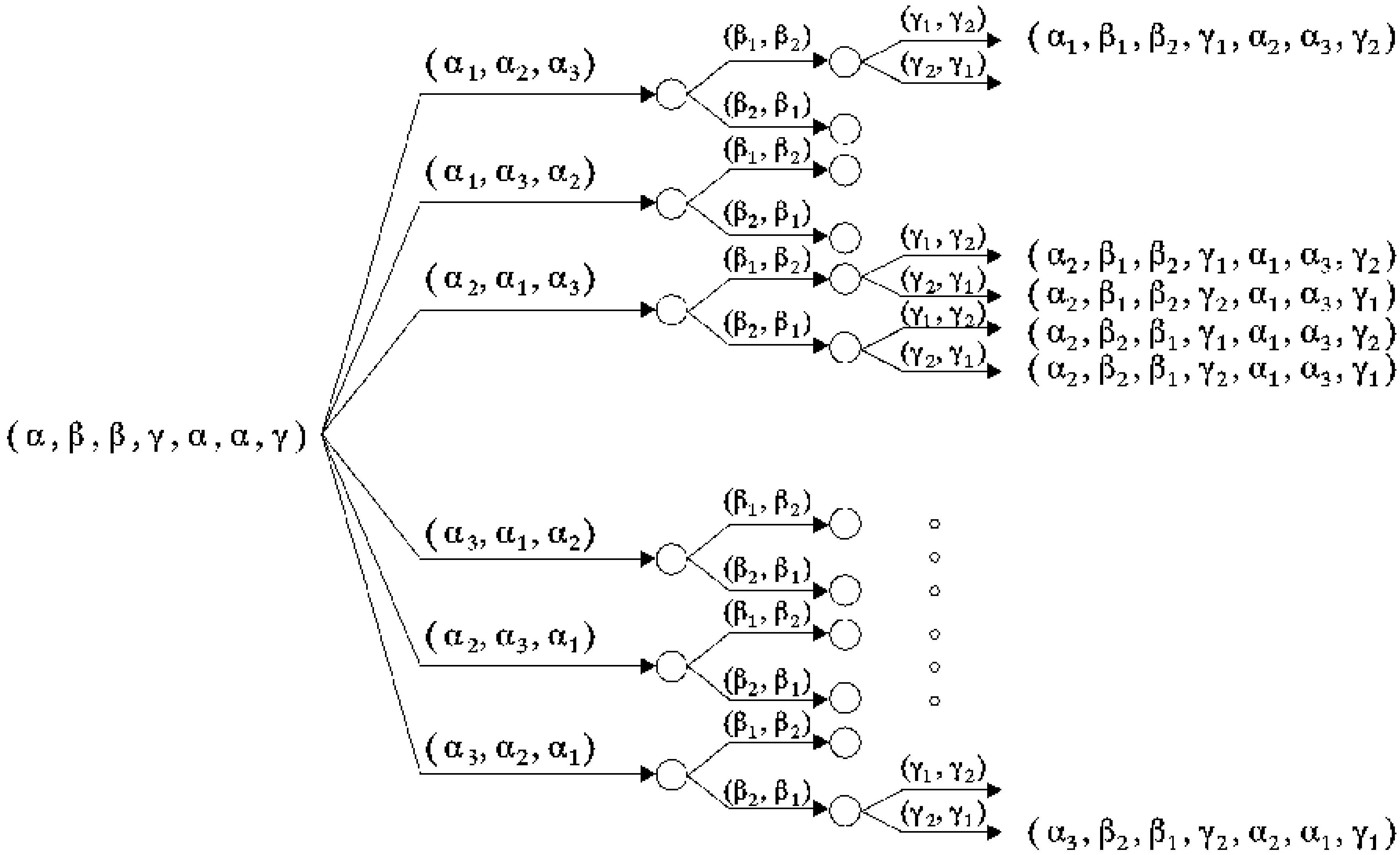
$$(\alpha_2, \beta, \beta, \gamma, \alpha_1, \alpha_3, \gamma) \xrightarrow{(\beta_2, \beta_1)} (\alpha_2, \beta_2, \beta_1, \gamma, \alpha_1, \alpha_3, \gamma)$$

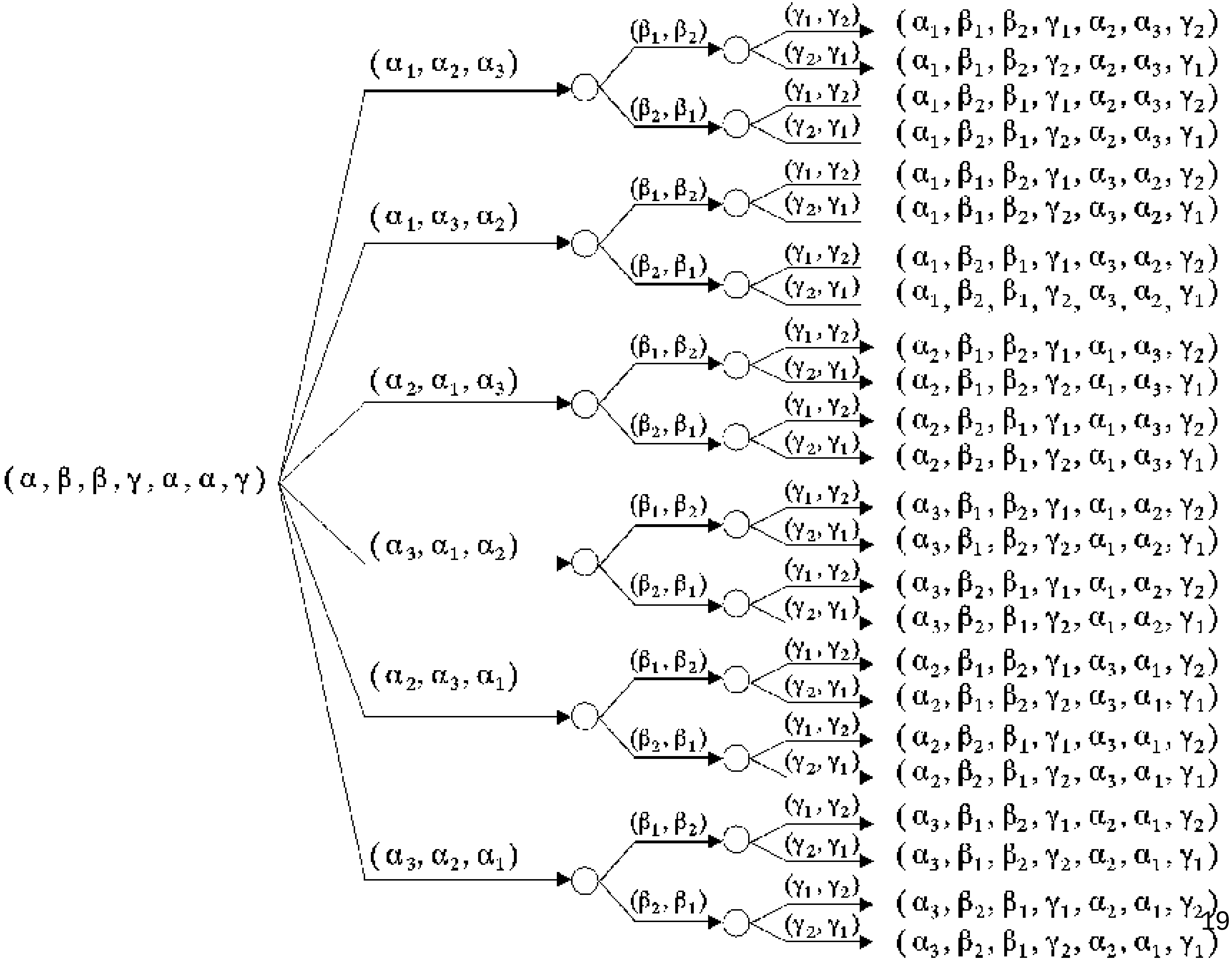
$$(\alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma, \alpha_1, \alpha_3, \gamma) \xrightarrow{(\gamma_1, \gamma_2)} (\alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \alpha_1, \alpha_3, \gamma_2)$$

$$(\alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma, \alpha_1, \alpha_3, \gamma) \xrightarrow{(\gamma_2, \gamma_1)} (\alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_2, \alpha_1, \alpha_3, \gamma_1)$$

$$(\alpha_2, \beta_2, \beta_1, \gamma, \alpha_1, \alpha_3, \gamma) \xrightarrow{(\gamma_1, \gamma_2)} (\alpha_2, \beta_2, \beta_1, \gamma_1, \alpha_1, \alpha_3, \gamma_2)$$

$$(\alpha_2, \beta_2, \beta_1, \gamma, \alpha_1, \alpha_3, \gamma) \xrightarrow{(\gamma_2, \gamma_1)} (\alpha_2, \beta_2, \beta_1, \gamma_2, \alpha_1, \alpha_3, \gamma_1)$$


(α, β, β, γ, α, α, γ)
(α1, α2, α3)
(α1, α3, α2)
(α2, α1, α3)
(α3, α1, α2)
(α2, α3, α1)
(α3, α2, α1)
(β1, β2)
(β2, β1)
(γ1, γ2)
(γ2, γ1)
(α1, β1, β2, γ1, α2, α3, γ2)
(α2, β1, β2, γ1, α1, α3, γ2)
(α2, β1, β2, γ2, α1, α3, γ1)
(α2, β2, β1, γ1, α1, α3, γ2)
(α2, β2, β1, γ2, α1, α3, γ1)
(α3, β2, β1, γ2, α2, α1, γ1)


$(\alpha, \beta, \beta, \gamma, \alpha, \alpha, \gamma)$
$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$
$(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2)$
$(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3)$
$(\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2)$
$(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1)$
$(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)$
(β_1, β_2)
(β_2, β_1)
(γ_1, γ_2)
(γ_2, γ_1)
$(\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_2)$
$(\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \gamma_2, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1)$
$(\alpha_1, \beta_2, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_2)$
$(\alpha_1, \beta_2, \beta_1, \gamma_2, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1)$
$(\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \alpha_3, \alpha_2, \gamma_2)$
$(\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \alpha_2, \gamma_1)$
$(\alpha_1, \beta_2, \beta_1, \gamma_1, \alpha_3, \alpha_2, \gamma_2)$
$(\alpha_1, \beta_2, \beta_1, \gamma_2, \alpha_3, \alpha_2, \gamma_1)$
$(\alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \alpha_1, \alpha_3, \gamma_2)$
$(\alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_2, \alpha_1, \alpha_3, \gamma_1)$
$(\alpha_2, \beta_2, \beta_1, \gamma_1, \alpha_1, \alpha_3, \gamma_2)$
$(\alpha_2, \beta_2, \beta_1, \gamma_2, \alpha_1, \alpha_3, \gamma_1)$
$(\alpha_3, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \alpha_1, \alpha_2, \gamma_2)$
$(\alpha_3, \beta_1, \beta_2, \gamma_2, \alpha_1, \alpha_2, \gamma_1)$
$(\alpha_3, \beta_2, \beta_1, \gamma_1, \alpha_1, \alpha_2, \gamma_2)$
$(\alpha_3, \beta_2, \beta_1, \gamma_2, \alpha_1, \alpha_2, \gamma_1)$
$(\alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \alpha_3, \alpha_1, \gamma_2)$
$(\alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \alpha_1, \gamma_1)$
$(\alpha_2, \beta_2, \beta_1, \gamma_1, \alpha_3, \alpha_1, \gamma_2)$
$(\alpha_2, \beta_2, \beta_1, \gamma_2, \alpha_3, \alpha_1, \gamma_1)$
$(\alpha_3, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \alpha_2, \alpha_1, \gamma_2)$
$(\alpha_3, \beta_1, \beta_2, \gamma_2, \alpha_2, \alpha_1, \gamma_1)$
$(\alpha_3, \beta_2, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \alpha_1, \gamma_2)$
$(\alpha_3, \beta_2, \beta_1, \gamma_2, \alpha_2, \alpha_1, \gamma_1)$

Πρόταση

Ο αριθμός των μεταθέσεων των ν ειδών στοιχείων εκ των οποίων τα r_1 είναι τύπου 1, τα r_2 είναι τύπου 2, ..., τα r_ν είναι τύπου ν δίνεται από την έκφραση

$$\binom{r}{r_1, r_2, \ldots, r_\nu} = \frac{r!}{r_1! r_2! \ldots r_\nu!}$$

όπου

$$r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\nu.$$

Απόδειξη

Έστω X = $\{x_1, x_2, ..., x_\nu\}$ τα ν διαφορετικά στοιχεία που διαθέτουμε και

$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu)$ με $\alpha_1 \in X$, $\alpha_2 \in X$, ... $\alpha_\nu \in X$

η γενική μορφή μιας μετάθεσης με τις προδιαγραφές που τέθηκαν.

Η διαδικασία συμπλήρωσης της διατεταγμένης r-αδας μπορεί να γίνει σε ν διαδοχικές φάσεις ως εξής:

Πρώτη φάση: διαλέγουμε r_1 από τις r διαθέσιμες θέσεις $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$ και τοποθετούμε σε αυτές όλα τα στοιχεία τύπου 1. Η επιλογή των r_1 θέσεων μπορεί προφανώς να γίνει με $\binom{r}{r_1}$ διαφορετικούς τρόπους.

Δεύτερη φάση: διαλέγουμε r_2 από τις r - r_1 θέσεις που απέμειναν ελεύθερες και εκεί τοποθετούμε όλα τα r_2 διαθέσιμα στοιχεία τύπου 2. Η επιλογή των r_2 θέσεων μπορεί να γίνει με $\binom{r-r_1}{r_2}$ διαφορετικούς τρόπους.

Προχωρούμε με ανάλογη διαδικασία μέχρι το **τελικό βήμα** (ν-οστό) όπου θα πρέπει να διαλέξουμε rν θέσεις για να τοποθετήσουμε τα r_ν διαθέσιμα στοιχεία τύπου ν (δηλαδή τα x_ν). Ο αριθμός ελεύθερων θέσεων που απέμειναν μετά την ολοκλήρωση των ν - 1 προηγούμενων φάσεων είναι ίσος με $r - (r_1 + r_2 + ... + r_{\nu-1}) = r_\nu$ και το πλήθος των διαφορετικών επιλογών είναι

$$\binom{r-(r_1+r_2+...+r_{\nu-1})}{r_\nu} = \binom{r_\nu}{r_\nu} = 1$$

Επομένως με βάση την αρχή του γινομένου, ο ζητούμενος αριθμός των μεταθέσεων των ν ειδών στοιχείων θα είναι ίσος με

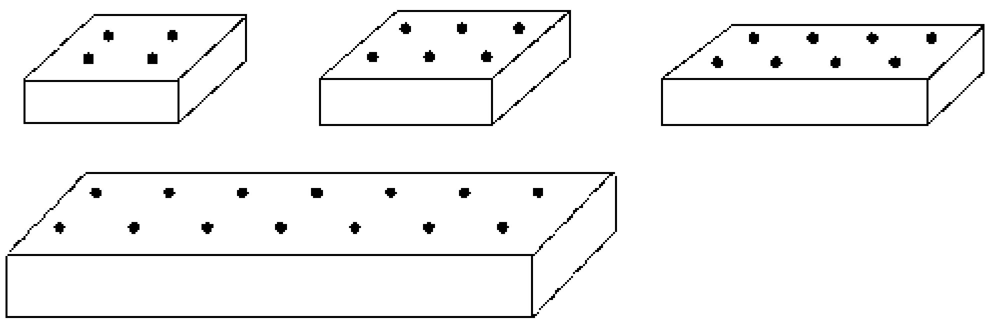
$$\binom{r}{r_1}\binom{r-r_1}{r_2}...\binom{r-(r_1+r_2+...+r_{\nu-1})}{r_\nu} = \frac{r!}{r_1!(r-r_1)}\cdot\frac{(r-r_1)!}{r_2!((r-r_1)-r_2)!}\cdots\frac{(r-(r_1+r_2+...+r_{\nu-1}))!}{r_\nu!((r-(r_1+r_2+...+r_{\nu-1}))-r_\nu)!}$$

το οποίο μετά τις απλοποιήσεις δίνει

$$\frac{r!}{r_1!r_2!...r_\nu!}.$$ ■

Παράδειγμα 2.4.3

Σε ένα παιχνίδι κατασκευών υπάρχουν «τουβλάκια» μήκους 2, 3, 4 και 7. Αν υπάρχουν διαθέσιμα 5, 4, 8 και 2 τουβλάκια μήκους 2, 3, 4 και 7 αντίστοιχα, με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να κτιστεί μια σειρά από τουβλάκια σε έναν τοίχο μήκους 68;



Απάντηση

Αν συμβολίσουμε με x_1, x_2, x_3 και x_4 τα τουβλάκια μήκους 2, 3, 4 και 7 αντίστοιχα, τότε το πρόβλημά μας είναι ισοδύναμο με την εύρεση του πλήθους των μεταθέσεων των ν = 4 ειδών στοιχείων (**X = {x_1, x_2, x_3, x_4}**) εκ των οποίων

- τα $r_1 = 5$ είναι του τύπου 1 (x_1),
- τα $r_2 = 4$ είναι τύπου 2 (x_2),
- τα $r_3 = 8$ είναι τύπου 3 (x_3) και
- τα $r_4 = 2$ είναι τύπου 4 (x_4).

Το ζητούμενο πλήθος δίνεται από τον τύπο

$$\binom{r}{5,4,8,2} = \frac{r!}{5!\,4!\,8!\,2!}$$

όπου

$$r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 5 + 4 + 8 + 2 = 19$$

δηλαδή είναι ίσο με

$$\frac{19!}{5!\,4!\,8!\,2!} = 47.616.660.$$

Παράδειγμα 2.4.4

Έστω $\nu = 2$ ένας ακέραιος αριθμός.

α. Ποιος είναι ο αριθμός των μεταθέσεων των ν ειδών στοιχείων $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ κάθε ένα από τα οποία χρησιμοποιείται 3 φορές;

β. Να δείξετε ότι ο αριθμός $(3\nu)!$ διαιρείται πάντοτε από το γινόμενο $2^\nu \cdot 3^\nu$.

Απάντηση

α. Έχουμε $r_1 = r_2 = \ldots = r_\nu$ και

$$r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\nu = \overbrace{3 + 3 + \ldots + 3}^{\nu \text{ φορές}} = 3\nu.$$

Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι ίσος με

$$s = \binom{3\nu}{3,3,\ldots,3} = \frac{(3\nu)!}{\underbrace{3!3!\ldots3!}_{\nu \text{ φορές}}} = \frac{(3\nu)!}{(3!)^\nu} = = \frac{(3\nu)!}{(1\cdot2\cdot3)^\nu} = \frac{(3\nu)!}{2^\nu\cdot3^\nu}.$$

β. Είναι άμεση συνέπεια της σχέσης

$$s = \frac{(3\nu)!}{2^\nu\cdot3^\nu}$$

ή ισοδύναμα

$$(3\nu)! = s\cdot(2^\nu\cdot3^\nu)$$

όπου το s είναι φυσικός αριθμός.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο αριθμός

$$\binom{r}{r_1, r_2, \ldots, r_\nu}, \text{ με } r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\nu$$

δίνει επίσης τον αριθμό των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να χωρίσουμε ένα σύνολο $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\nu$ στοιχείων

$$A = \{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$$

σε ν ξένα ανά δύο υποσύνολα A_1, A_2, ..., A_ν έτσι ώστε

- το πρώτο υποσύνολο A_1 να περιέχει r_1 στοιχεία
- το δεύτερο υποσύνολο A_2 να περιέχει r_2 στοιχεία

.

.

.

- το ν-στο υποσύνολο A_ν να περιέχει r_ν στοιχεία.

Παράδειγμα 2.4.5

Στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής επιστήμης εισήχθησαν κατά το ακαδημαϊκό έτος 200 άτομα. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να χωριστούν οι 200 νέοι φοιτητές σε 5 τμήματα

$$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$$

τα οποία

α. να έχουν 30, 40, 50, 60 και 20 φοιτητές αντίστοιχα;

β. να είναι του ιδίου μεγέθους (40 φοιτητές ανά τμήμα); Αν στην περίπτωση αυτή δεν μας ενδιαφέρει η σειρά των 5 τμημάτων ποιο θα είναι το αντίστοιχο πλήθος;

Απάντηση

α. Σύμφωνα με τη συζήτηση που προηγήθηκε, το ζητούμενο πλήθος είναι ίσο με

$$\binom{200}{30,40,50,60,20}=\frac{200!}{30!40!50!60!20!}.$$

β. Όμοια θα έχουμε

$$\binom{200}{40,40,40,40,40}=\frac{200!}{(40!)^5}$$

διαφορετικούς τρόπους χωρισμού των φοιτητών σε 5 ισομεγέθη τμήματα.
Στην περίπτωση που δεν μας ενδιαφέρει η σειρά των τμημάτων σκεφτόμαστε ως εξής: από κάθε τέτοιο χωρισμό των 200 φοιτητών σε 5 ισομεγέθη τμήματα A_1, A_2, A_3, A_4 , A_5 μπορούμε να πάρουμε 5! διαιρέσεις με εναλλαγή της σειράς καταγραφής των τμημάτων, π.χ. (A_1, A_2, A_3, A_4 , A_5), (A_2, A_1, A_3, A_4 , A_5), (A_1, A_3, A_2, A_5 , A_4) κλπ. Επομένως, αν x είναι το ζητούμενο πλήθος, θα έχουμε

$$x\cdot 5!=\binom{200}{40,40.40.40.40}=\frac{200!}{(40!)^5}$$

το οποίο δίνει

$$x=\frac{200!}{(40!)^5\cdot 5!}.$$

Ασκήσεις **(**σελίδα 95-97**)**

1. Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα μπορούν να προκύψουν κατά τη ρίψη δύο διαφορετικών ζαριών; Αν το πείραμα αυτό επαναληφθεί ν φορές πόσα είναι τα διαφορετικά αποτελέσματα;

2. Ένα λεωφορείο ξεκινάει από την αφετηρία με k άτομα. Μέχρι να φτάσει στο τέλος της διαδρομής του κάνει ν στάσεις (συμπεριλαμβανομένου του τέρματος). Να υπολογιστεί ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούν να αποβιβαστούν τα k άτομα στις ν στάσεις. Αν είναι γνωστό ότι τουλάχιστον σε μία στάση αποβιβάστηκαν περισσότερα από 1 άτομα, πόσοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι αποβίβασης;

Ασκήσεις (σελίδα 95-97)

3. Σε ένα δοχείο υπάρχουν 9 σφαιρίδια αριθμημένα από το 1 έως το 9. Εξάγουμε 6 σφαιρίδια το ένα μετά το άλλο και καταγράφουμε τον εξαψήφιο αριθμό που προκύπτει. Πόσοι διαφορετικοί αριθμοί μπορούν να σχηματιστούν αν μετά από κάθε εξαγωγή γίνεται καταγραφή του αριθμού που φέρει το σφαιρίδιο και επιστρέφεται στην κάλπη πριν προχωρήσουμε στην επόμενη εξαγωγή;

4. Πέντε άτομα γράφουν σε ένα κατάλογο το μήνα γέννησής τους. Πόσοι διαφορετικοί κατάλογοι μπορούν να προκύψουν; Αν είναι γνωστό ότι τουλάχιστον 2 άτομα έχουν γεννηθεί τον ίδιο μήνα, ποιος θα είναι ο αριθμός των διαφορετικών καταλόγων που μπορούν να προκύψουν;

5. Ρίχνουμε ένα ζάρι $\nu \leq 6$ φορές. Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα μπορούν να εμφανιστούν τέτοια ώστε τουλάχιστον μια από τις ενδείξεις 1, 2, ..., 6 να εμφανιστεί περισσότερο από μία φορές;

Ασκήσεις(σελίδα 95-97)

6. Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης «ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ» υπάρχουν;

7. Σε ένα πάρτι στο οποίο συμμετέχουν ν άτομα πρόκειται να δημιουργηθεί ένας κατάλογος με τις ημερομηνίες γέννησης των ν ατόμων. Πόσοι διαφορετικοί κατάλογοι μπορούν να προκύψουν αν είναι γνωστό ότι τουλάχιστον δύο άτομα έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα του χρόνου; Θεωρήστε ότι το έτος έχει 365 ημέρες.

8. Σε k φακέλους αριθμημένους από 1 έως k πρόκειται να τοποθετηθούν ν επιστολές αριθμημένες από 1 έως ν. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν οι επιστολές στους φακέλους αν

α. κάθε φάκελος μπορεί να πάρει από 0 έως ν επιστολές;

β. σε κάθε φάκελο πρέπει να μπει το πολύ μια επιστολή;

γ. σε έναν τουλάχιστο φάκελο τοποθετούνται δύο ή περισσότερες επιστολές;

Στα ερωτήματα (β) και (γ) υποτίθεται ότι ισχύει $1 \leq k \leq ν$.

***Ασκήσεις* (σελίδα 95-97)**

9. **α.** Να βρεθεί ο αριθμός των μεταθέσεων των ν ειδών στοιχείων καθένα από τα οποία χρησιμοποιείται 4 φορές.

β. Να δείξετε ότι, για κάθε θετικό ακέραιο $\nu \geq 1$, το γινόμενο $2^{3\nu} \cdot 3^{\nu-1}$ διαιρεί τον αριθμό $(4\nu - 1)! \cdot \nu$.

10. Εργαζόμενοι όπως στην προηγούμενη άσκηση δείξτε ότι στα επόμενα ζευγάρια αριθμών, ο πρώτος αριθμός είναι πολλαπλάσιο του δεύτερου ($\nu \geq 1$ είναι οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος)

α. $(6\nu - 1)! \cdot \nu$, $5^{\nu} \cdot 3^{2\nu-1} \cdot 2^{4\nu-1}$

β. $(\nu^2)!$, $(\nu!)^{\nu}$

γ. $(\nu!)!$, $(\nu!)^{(\nu-1)!}$

Επαναληπτικοί Συνδυασμοί

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

Αν X = $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ μπορούμε να σχηματίσουμε $\binom{4}{3} = 4$ συνήθεις συνδυασμούς, πιο συγκεκριμένα τους

$$\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_4\}, \{x_1, x_3, x_4\}, \{x_2, x_3, x_4\}.$$

Επιτρέποντας τη χρήση των στοιχείων του X περισσότερες από μία φορές, μπορούμε να δημιουργήσουμε επιπλέον τους συνδυασμούς που φαίνονται στον επόμενο Πίνακα

Στοιχείο του συνόλου X	**Συνδυασμοί που χρησιμοποιούν περισσότερες από μία φορές το στοιχείο**			
x_1	x_1, x_1, x_2	x_1, x_1, x_3	x_1, x_1, x_4	x_1, x_1, x_1
x_2	x_2, x_2, x_1	x_2, x_2, x_3	x_2, x_2, x_4	x_2, x_2, x_2
x_3	x_3, x_3, x_1	x_3, x_3, x_2	x_3, x_3, x_4	x_3, x_3, x_3
x_4	x_4, x_4, x_1	x_4, x_4, x_2	x_4, x_4, x_3	x_4, x_4, x_4

Συμβολισμός: $\begin{bmatrix} \nu \\ k \end{bmatrix}$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

Γενικά, έστω Χ = $\{x_1, x_2, ..., x_\nu\}$

Επαναληπτικός συνδυασμός των ν στοιχείων του Χ ανά k ή **συνδυασμός** των ν στοιχείων του Χ ανά k με **επανάληψη** ή απλά επαναληπτικός συνδυασμός των ν ανά k λέγεται κάθε επιλογή k στοιχείων

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$$

από τα ν στοιχεία του συνόλου Χ, όπου όμως είναι επιτρεπτό κάποιο ή κάποια στοιχεία του Χ να χρησιμοποιηθούν περισσότερες από μια φορές.

Επειδή στην περίπτωση αυτή τα στοιχεία $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ **δεν είναι διαφορετικά μεταξύ τους** θα **αποφεύγουμε** να χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k\}$$

Παράδειγμα 2.5.1

Μια εταιρεία θέλει να αγοράσει πέντε αυτό-κίνητα από μια αντιπροσωπία αυτοκινήτων.
Αν οι διαθέσιμοι χρωματισμοί είναι λευκό (Λ), μαύρο (Μ) ή κόκκινο (Κ), με πόσους διαφορετικούς χρωματικούς συνδυασμούς αυτοκινήτων μπορεί να πραγματοποιήσει η εταιρεία την παραγγελία των πέντε αυτοκινήτων;

Απάντηση

Στο παράδειγμα αυτό υπάρχουν ν = 3 διαφορετικά στοιχεία, δηλαδή

$$X = \{Λ, Μ, Κ\}$$

και θέλουμε να επιλέξουμε (με επανάληψη) $k = 5$ στοιχεία. Τυπικές αποδεκτές επιλογές είναι οι

Λ, Λ, Λ, Λ, Λ	**Λ, Λ, Κ, Κ, Κ**	**Μ, Λ, Λ, Μ, Κ**

(η **σειρά αναγραφής** των 5 στοιχείων **δεν παίζει κανένα ρόλο**, δηλαδή η επιλογή

Λ, Λ, Κ, Κ, Κ

είναι ακριβώς η ίδια με την

Λ, Κ, Λ, Κ, Κ).

Είναι φανερό ότι η κάθε συγκεκριμένη επιλογή που κάνουμε καθορίζεται πλήρως αν δώσουμε την εξής πληροφορία: πόσα λευκά αυτοκίνητα (Λ), πόσα μαύρα (Μ) και πόσα κόκκινα (Κ) διαλέχτηκαν.

Πλήθος παραγγελιών			
Λευκά	**Μαύρα**	**Κόκκινα**	**Σύνολο**
3	2	0	5
2	2	1	5
0	0	5	5
1	3	1	5
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Λ	Μ	Κ
●●●	●●	
●●	●●	●
		●●●●●
●	●●●	●
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Αν στην κάθε συγκεκριμένη παραγγελία που εμφανίζεται στο δεύτερο Πίνακα αντικαταστήσουμε

- τις κάθετες γραμμές με τον αριθμό 1
- τα σύμβολα ● με τον αριθμό 0

θα πάρουμε μια (διατεταγμένη) σειρά αποτελούμενη από πέντε 0 και δύο 1, πιο συγκεκριμένα

0001001
0010010
1100000
0100010.

Αντίστροφα, κάθε σειρά από

$$7 = 5 + 3 - 1 = v + k - 1 \text{ ψηφία } 0, 1$$

εκ των οποίων τα $k = 5$ ψηφία είναι 0, καθορίζει μια εφικτή παραγγελία αυτοκινήτων.

Για παράδειγμα, η σειρά

0010010

δηλώνει μια παραγγελία 5 αυτοκινήτων (όσα και τα ψηφία 0) εκ των οποίων

- το ένα είναι λευκό (όσα αυτοκίνητα είναι σημειωμένα πριν από την πρώτη εμφάνιση του ψηφίου 1)
- τα τρία είναι μαύρα (όσα αυτοκίνητα είναι σημειωμένα ανάμεσα στην πρώτη και δεύτερη εμφάνιση του ψηφίου 1)
- το ένα είναι κόκκινο (όσα αυτοκίνητα είναι σημειωμένα μετά την τρίτη εμφάνιση του ψηφίου 1).

Επομένως το πλήθος των διαθέσιμων επιλογών είναι όσες και οι μεταθέσεις δύο όμοιων στοιχείων (του 0 και του 1) εκ των οποίων το πρώτο χρησιμοποιείται $r_1 = k = 5$ ακριβώς φορές ενώ το δεύτερο χρησιμοποιείται $r_2 = v - 1 = 3 - 1 = 2$ ακριβώς φορές, δηλαδή

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{(r_1 + r_2)!}{r_1! r_2!} = \frac{(5+2)!}{5!2!} = \frac{7!}{5!2!} = \binom{7}{2}. = \frac{7 \cdot 6}{2!} = 21.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι στο ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα θα καταλήγαμε αν παρατηρούσαμε ότι ο καθορισμός των σειρών 0001001, 0010010, ... μπορεί να γίνει εναλλακτικά αν

α. θεωρήσουμε πως υπάρχουν προς συμπλήρωση 7 θέσεις

0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0

β. διαλέξουμε δύο από τις επτά θέσεις για να τοποθετήσουμε τις δύο μονάδες. Αυτό φυσικά μπορεί να γίνει με $\binom{7}{2}$ τρόπους.

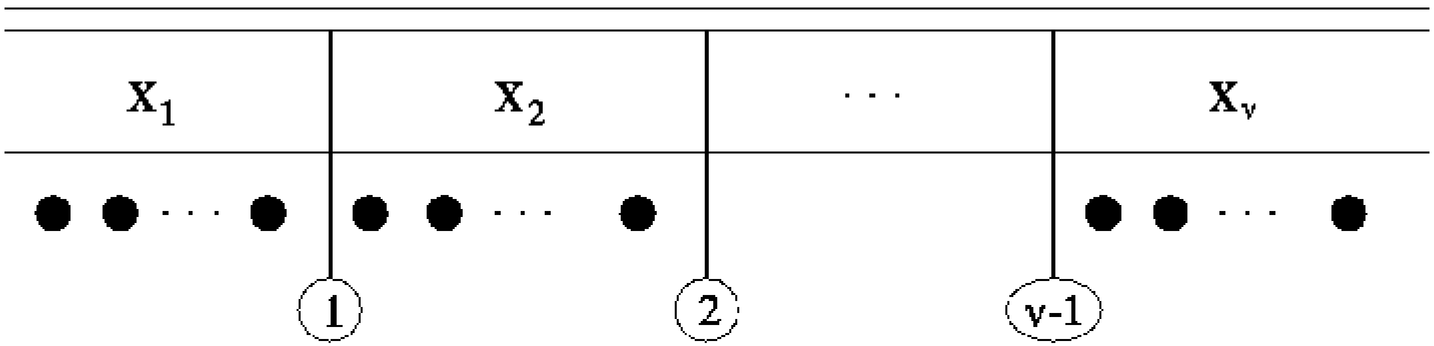
γ. συμπληρώσουμε τις υπόλοιπες πέντε θέσεις με τα πέντε μηδενικά.

Γενίκευση για οποιαδήποτε ν και k

Έστω

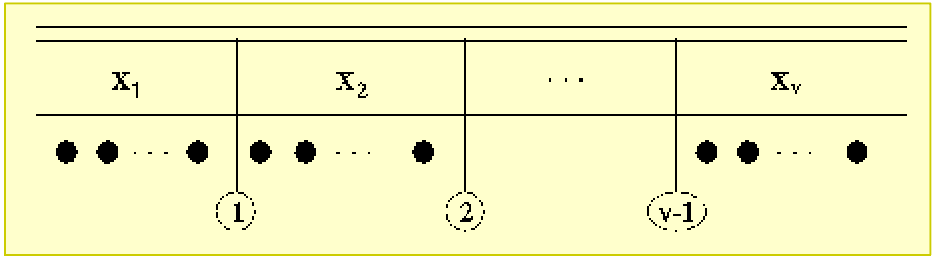
$$X = \{x_1, x_2, ..., x_ν\}$$

το σύνολο των ν διαφορετικών στοιχείων που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε. Ένας τυπικός επαναληπτικός συνδυασμός των ν ανά k θα έχει τη μορφή



ή ισοδύναμα, αν αντικαταστήσουμε τις κάθετες γραμμές με τον αριθμό 1 και τα σύμβολα • με τον αριθμό 0

0 0 ... 0 1 0 0 ... 0 1 ... 1 0 0 ... 0.



Με αυτό τον τρόπο το πρόβλημά μας μεταφέρεται στον υπολογισμό του πλήθους των **μεταθέσεων** **δύο** **ειδών στοιχείων** (1 και 0) εκ των οποίων

- τα r_1 = ν - 1 στοιχεία είναι τύπου 1 (οι ν - 1 μονάδες που αντιστοιχούν στα ν - 1 χωρίσματα)
- και τα $r_2 = k$ είναι τύπου 2 (τα k μηδενικά που αντιστοιχούν στα k σύμβολα •)

Επομένως

$$r = r_1 + r_2 = (\nu - 1) + k = \nu + k - 1$$

και το ζητούμενο πλήθος είναι ίσο με

$$\binom{r}{r_1, r_2} = \frac{r_1}{r_1!\, r_2!} = \frac{(\nu + k + 1)!}{(\nu - 1)!\, k!}$$

Πρόταση

Ο αριθμός $\begin{bmatrix} v \\ k \end{bmatrix}$ των επαναληπτικών συνδυασμών των v στοιχείων k δίνεται από τον τύπο

$$\begin{bmatrix} v \\ k \end{bmatrix} = \binom{v+k-1}{k} = \binom{v+k-1}{v-1} = \frac{(v+k-1)!}{k!(v-1)!} =$$

$$= \frac{v(v+1)\ldots(v+k+1)}{k!}, \quad v \geq 1, \quad k \geq 1.$$

Παρατηρήσεις

- Σε αντίθεση με τους συνήθεις συνδυασμούς των ν ανά k όπου για να έχει το σύμβολο $\binom{\nu}{k}$ μη μηδενική τιμή απαιτούμε να ισχύει $k \leq \nu$, στην περίπτωση των επαναληπτικών συνδυασμών των ν ανά k, το πλήθος των απαριθμούμενων σχηματισμών είναι μη μηδενικό, για **όλους τους θετικούς ακέραιους** ν και k.

- **Ειδικές Περιπτώσεις**

$$\begin{bmatrix}\nu\\0\end{bmatrix}=\binom{\nu+0-1}{0}=\binom{\nu-1}{0}=1,\ \text{για } \nu\geq 1$$

$$\begin{bmatrix}\nu\\1\end{bmatrix}=\binom{\nu+1-1}{1}=\binom{\nu}{1}=\nu,$$

$$\begin{bmatrix}\nu\\\nu\end{bmatrix}=\binom{\nu+\nu-1}{\nu}=\binom{2\nu-1}{\nu}=\frac{(2\nu-1)!}{\nu!(\nu-1)!}.$$

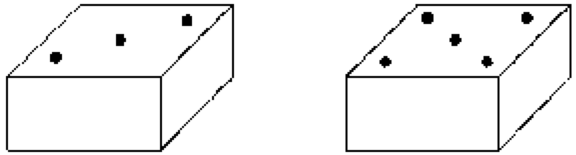
$$\begin{bmatrix}1\\k\end{bmatrix}=\binom{1+k-1}{k}=\binom{k}{k}=1.$$

Παράδειγμα 2.5.2

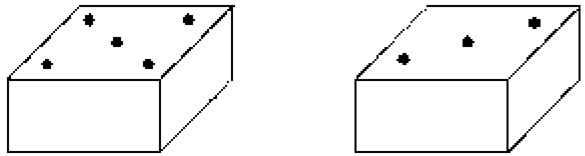
Πόσα είναι τα διαφορετικά αποτελέσματα που μπορούμε να πάρουμε αν ρίξουμε ένα ζάρι 2 φορές και δεν μας ενδιαφέρει η σειρά εμφάνισης των ενδείξεων;

Απάντηση

Εδώ, ένα αποτέλεσμα της μορφής



θεωρείται ταυτόσημο με το



Επομένως, εδώ ενδιαφερόμαστε για **μη διατεταγμένα** ζεύγη αποτελεσμάτων της μορφής

$$\alpha_1, \alpha_2$$

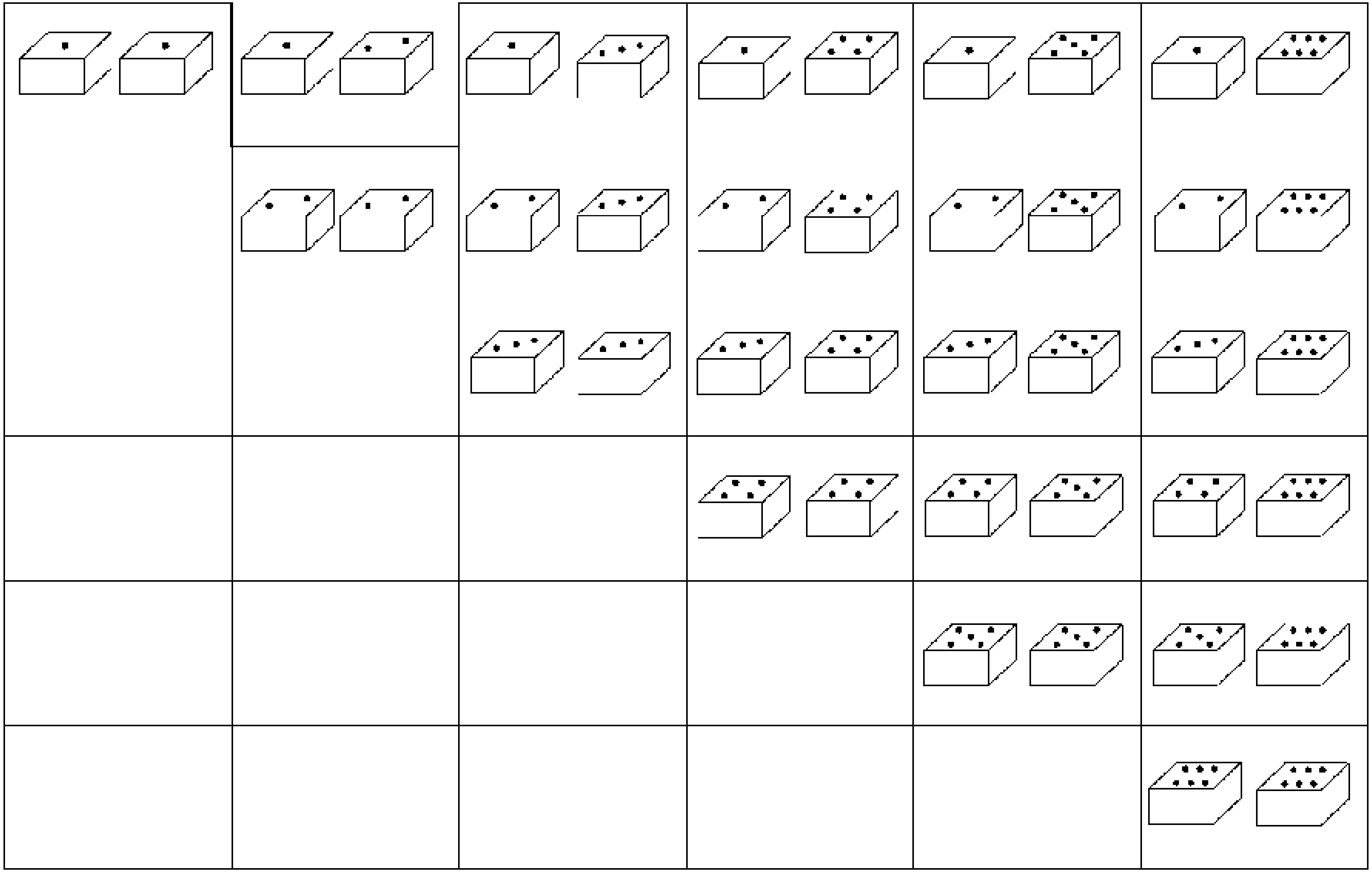
όπου $\alpha_1, \alpha_2 \in X = \{1, 2, ..., 6\}$ και τα α_1, α_2 μπορούν να είναι και ίσα μεταξύ τους.

Έτσι το σύνολο που ζητάμε να απαριθμή-σουμε είναι το σύνολο των επαναληπτικών συνδυασμών των στοιχείων του X ανά $k = 2$

Ο αριθμός των διαφορετικών αποτελεσμάτων θα δίνεται από τον τύπο

$$\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix} = \binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = \frac{7\cdot 6}{2!} = 21.$$

Τα αποτελέσματα αυτά παρουσιάζονται αναλυτικά στο επόμενο σχήμα.



Πρόταση

Για τον αριθμό $\begin{bmatrix} \nu \\ k \end{bmatrix}$ των επαναληπτικών συνδυασμών των ν στοιχείων ανά k, όπου ν, k είναι οποιοιδήποτε θετικοί ακέραιοι, ισχύουν οι επόμενες ισότητες

α. $\begin{bmatrix} \nu \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+1 \\ \nu-1 \end{bmatrix}$

β. $\begin{bmatrix} \nu \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu \\ k-1 \end{bmatrix}$, ν > 1.

Απόδειξη

(α) $\begin{bmatrix} k+1 \\ v-1 \end{bmatrix} = \binom{(k+1)+(v-1)-1}{v-1} = \binom{v+k-1}{v-1} = \begin{bmatrix} v \\ k \end{bmatrix}.$

(β) Αρκεί να γράψουμε την αναλυτική έκφραση των προσθετέων του δεξιού μέλους με χρήση παραγοντικών, οπότε βρίσκουμε διαδοχικά

$$\begin{bmatrix} v-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v \\ k-1 \end{bmatrix} = \frac{((v-1)+k-1)!}{k!((v-1)-1)!} + \frac{(v+(k-1)-1)!}{(k-1)!(v-1)!} =$$

$$= \frac{(v+k-2)!}{k!(v-2)!} + \frac{(v+k-2)!}{(k-1)!(v-1)!} =$$

$$= \frac{(v+k-2)!(v-1)}{k!(v-1)!} + \frac{(v+k-2)!k}{k!(v-1)!} =$$

$$= \frac{(v+k-2)!\left[(v-1)+k\right]}{k!(v-1)!} = \frac{(v+k-2)!(v+k-1)}{k!(v-1)!} =$$

$$= \frac{(v+k-1)!}{k!(v-1)!} = \begin{bmatrix} v \\ k \end{bmatrix}.$$

Ασκήσεις (σελίδα 105-106)

1. Σε κάθε πλευρά ενός κομματιού από το παιχνίδι «ντόμινο» είναι σημειωμένος ένας από τους αριθμούς 0 (κενή πλευρά), 1 (μία τελεία), 2 (δύο τελείες), ..., 6 (έξι τελείες).
Τα κομμάτια δεν θεωρούνται ότι έχουν δεξιά / αριστερή πλευρά, δηλαδή δεν υπάρχει διάταξη στους αριθμούς που σημειώνονται επάνω τους.

α. Πόσα διαφορετικά κομμάτια μπορούν να κατασκευαστούν;

β. Αν αντί για 7 αριθμούς (0, 1, 2, ..., 6) χρησιμοποιούσαμε για κάθε πλευρά ν αριθμούς (0, 1, ..., ν - 1) πόσα διαφορετικά κομμάτια θα προέκυπταν; Πόσους διαφορετικούς αριθμούς θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε αν θέλουμε να μπορούμε να κατασκευάσουμε τουλάχιστον 55 διαφορετικά κομμάτια;

Ασκήσεις (σελίδα 105-106)

2. Αν ν, k είναι θετικοί ακέραιοι, να αποδειχτούν σε επόμενες ταυτότητες

α. $$k\begin{bmatrix} \nu \\ k \end{bmatrix} = (\nu + k\text{-}1)\begin{bmatrix} \nu \\ k\text{-}1 \end{bmatrix}$$

β. $$\begin{bmatrix} \nu \\ k \end{bmatrix} = \frac{\nu}{k}\begin{bmatrix} \nu+1 \\ k\text{-}1 \end{bmatrix}$$

γ. $$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{n-k+1}{\nu-1}\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

δ. $$\begin{bmatrix} \nu \\ k \end{bmatrix}\binom{k}{r} = \binom{\nu+k-1}{r}\begin{bmatrix} \nu \\ k-r \end{bmatrix}, \; r \le k$$

ε. $$\frac{(2n)!}{(n!)^2} = 2\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}$$

Ασκήσεις(σελίδα 105-106)

3. Έστω Χ ένα πεπερασμένο σύνολο με ν στοιχεία, α ένα συγκεκριμένο στοιχείο του Χ και k θετικός ακέραιος.

α. Πόσοι είναι οι επαναληπτικοί συνδυασμοί των ν στοιχείων του Χ ανά k οι οποίοι περιέχουν οπωσδήποτε το στοιχείο α;

β. Πόσοι είναι οι επαναληπτικοί συνδυασμοί των ν στοιχείων του Χ ανά k οι οποίοι δεν περιέχουν το στοιχείο α;

γ. Συνδυάζοντας τα προηγούμενα δείξτε ότι

$$\begin{bmatrix} \nu \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu - 1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu \\ k - 1 \end{bmatrix}$$

4. Σε μια βιβλιοθήκη με 5 ράφια πρόκειται να τοποθετηθούν 10 βιβλία. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό αν το μόνο που μας ενδιαφέρει είναι πόσα βιβλία (και όχι ποια) τοποθετούνται σε κάθε ράφι; Υποτίθεται ότι σε κάθε ράφι μπορούν να τοποθετηθούν από μηδέν έως όλα (10) τα βιβλία.

ΣΥΝΟΨΗ

ΚΡΙΤΗΡΙΟ 1

Μας ενδιαφέρει η σειρά καταγραφής των στοιχείων α_1, α_2, .., α_k (διατεταγμένες k-άδες)

Διατάξεις
Μεταθέσεις

Δεν μας ενδιαφέρει η σειρά καταγραφής των στοιχείων α_1, α_2, .., α_k (απλή επιλογή k στοιχείων)

Συνδυασμοί

ΣΥΝΟΨΗ

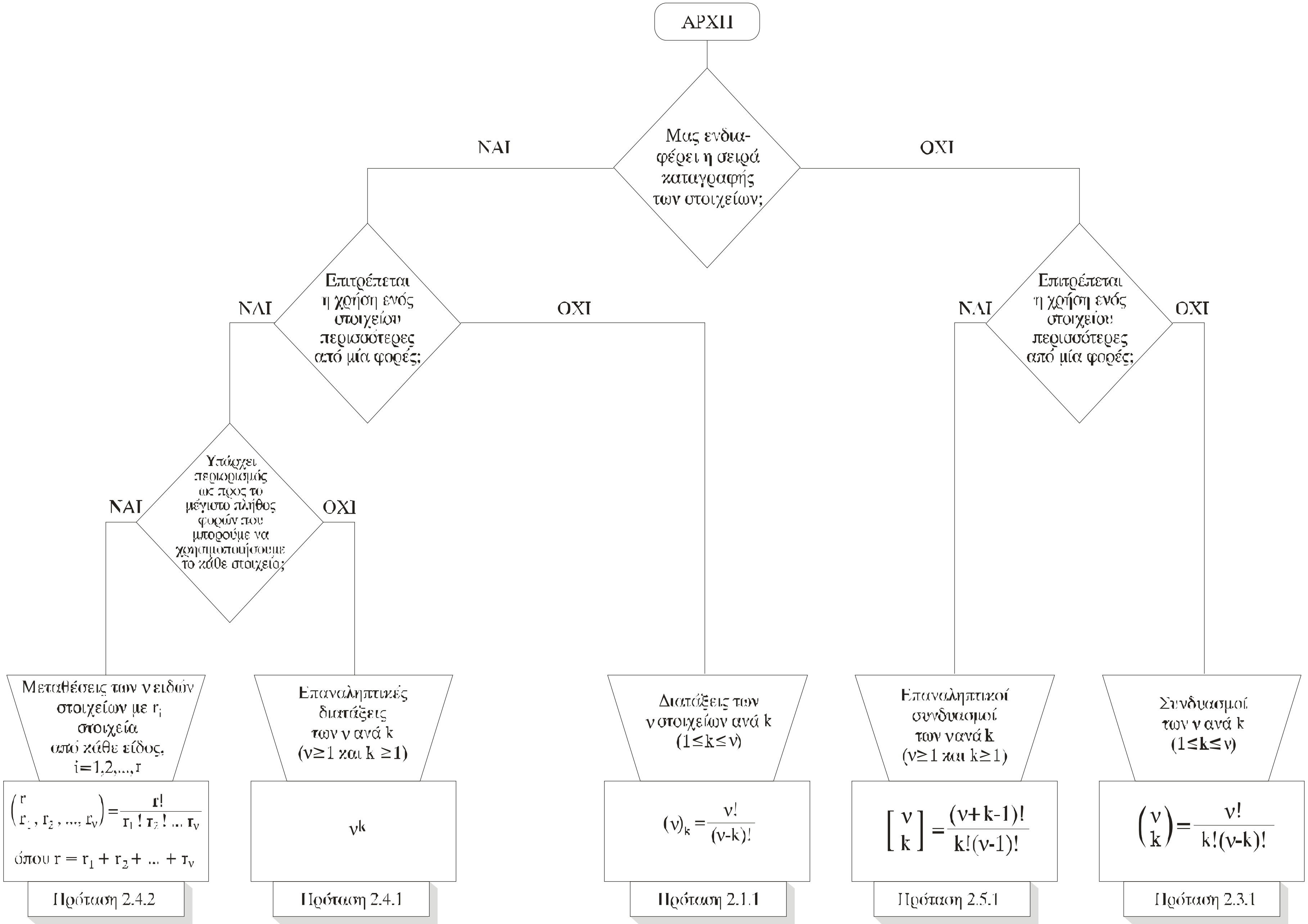
ΚΡΙΤΗΡΙΟ 2

Δεν επιτρέπεται η χρήση ενός στοιχείου του X περισσότερες από μία φορές

→ Απλοί (μη επαναληπτικοί) σχηματισμοί

Επιτρέπεται η χρήση ενός στοιχείου του X περισσότερες από μία φορές

→ Επαναληπτικοί σχηματισμοί


ΑΡΧΗ
Μας ενδιαφέρει η σειρά καταγραφής των στοιχείων;
ΝΑΙ
ΟΧΙ
Επιτρέπεται η χρήση ενός στοιχείου περισσότερες από μία φορές;
ΝΑΙ
ΟΧΙ
Επιτρέπεται η χρήση ενός στοιχείου περισσότερες από μία φορές;
ΝΑΙ
ΟΧΙ
Υπάρχει περιορισμός ως προς το μέγιστο πλήθος φορών που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κάθε στοιχείο;
ΝΑΙ
ΟΧΙ
Μεταθέσεις των ν ειδών στοιχείων με r_i στοιχεία από κάθε είδος, $i=1,2,\dots,r$
$\binom{r}{r_1, r_2, \dots, r_\nu} = \frac{r!}{r_1!\, r_2! \dots r_\nu!}$
όπου $r = r_1 + r_2 + \dots + r_\nu$
Πρόταση 2.4.2
Επαναληπτικές διατάξεις των ν ανά k (ν≥1 και k ≥1)
ν^k
Πρόταση 2.4.1
Διατάξεις των ν στοιχείων ανά k (1≤k≤ν)
$(\nu)_k = \frac{\nu!}{(\nu-k)!}$
Πρόταση 2.1.1
Επαναληπτικοί συνδυασμοί των ν ανά k (ν≥1 και k≥1)
$\left[\begin{matrix}\nu\\ k\end{matrix}\right] = \frac{(\nu+k-1)!}{k!(\nu-1)!}$
Πρόταση 2.5.1
Συνδυασμοί των ν ανά k (1≤k≤ν)
$\binom{\nu}{k} = \frac{\nu!}{k!(\nu-k)!}$
Πρόταση 2.3.1

Παράδειγμα 2.6.1

Ένα ζάρι ρίχνεται k φορές και καταγράφονται τα αποτελέσματα των k ρίψεων.

α. Πόσοι διαφορετικοί αριθμοί μπορούν να σχηματιστούν αν γράψουμε στη σειρά τις k ενδείξεις; Πόσοι από αυτούς τους αριθμούς έχουν όλα τα ψηφία τους διαφορετικά;

β. Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα μπορούμε να πάρουμε αν η σειρά με την οποία εμφανίζονται οι k ενδείξεις δεν μας ενδιαφέρει; Σε πόσα από αυτά τα αποτελέσματα δεν υπάρχουν ούτε δύο ίδιες ενδείξεις;

Απάντηση

Αν ορίσουμε ως

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

το σύνολο όλων των δυνατών ενδείξεων σε μία ρίψη του ζαριού, τότε οι k ρίψεις αντιστοιχούν στην επιλογή k αριθμών

$$\alpha_1 \in X,\ \alpha_2 \in X,\ \ldots,\ \alpha_k \in X$$

α. Εδώ **μας ενδιαφέρει η διάταξη** των ενδείξεων δηλαδή ζητάμε το πλήθος των επαναληπτικών διατάξεων των 6 στοιχείων του X ανά k. Το πλήθος αυτό είναι 6^k.

Αν οι αριθμοί που προκύπτουν δεν πρέπει να έχουν καθόλου ίδια στοιχεία, αυτό σημαίνει ότι στη διατεταγμένη k-άδα δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίου. Επομένως το πλήθος που ψάχνουμε είναι ίσο με

$$(6)_k = \frac{6!}{(6-k)!} = 6 \cdot 5 \cdots (6-k+1),\ 1 \le k \le 6.$$

Για $k > 6$ το πλήθος είναι μηδέν.

β. Εδώ ενδιαφερόμαστε για συνδυασμούς των 6 στοιχείων του X ανά k. Εφ' όσον δεν υπάρχει κανένας περιορισμός ως προς την εμφάνιση κάποιας ένδειξης περισσότερες από μια φορές, θα έχουμε **επαναληπτικούς συνδυασμούς** των ν = 6 στοιχείων αν k και το συνολικό τους πλήθος θα είναι

$$\begin{bmatrix}6\\k\end{bmatrix}=\binom{6+k-1}{k}=\binom{k+5}{k}=\binom{k+5}{5}=$$

$$=\frac{(k+5)(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)}{5!},\quad k\geq 1.$$

Στην περίπτωση που δεν επιτρέπεται η εμφάνιση ίδιων ενδείξεων, οι συνδυασμοί είναι πλέον **μη επαναληπτικοί**, οπότε το πλήθος τους θα δίνεται από τον τύπο

$$\binom{\nu}{k}=\frac{\nu!}{k!(\nu-k)!},\quad 1\leq\ k\leq\ \nu.$$

Όταν ισχύει k > ν το ζητούμενο πλήθος είναι μηδέν.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ (σελίδες 111-117)

1. Για να ανοίξει ένα χρηματοκιβώτιο ασφαλείας θα πρέπει να πληκτρολογηθεί σωστά ένας τετραψήφιος κωδικός αριθμός.

α. Να βρεθεί το πλήθος ν των διαφορετικών αριθμών που μπορούν να πληκτρολογηθούν.

β. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να δοκιμάσει ένας υποψήφιος κλέφτης κωδικούς αριθμούς έτσι ώστε να επιτύχει να ανοίξει την πόρτα

i. κατά την k δοκιμή ακριβώς; $(1 \leq k \leq \nu)$

ii. μέχρι την r δοκιμή; $(1 \leq r \leq \nu)$

iii. ακριβώς κατά την τελευταία δοκιμή;

2. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν

α. σε μια γραμμή

β. σε ένα κυκλικό τραπέζι με 2ν θέσεις.

ν διαφορετικά ανδρόγυνα έτσι ώστε κανένας άνδρας να μην κάθεται δίπλα σε άνδρα και καμία γυναίκα δίπλα σε άλλη γυναίκα;

3. Αφού πρώτα διαπιστώσετε ότι ισχύει η ταυτότητα

$$r \cdot r\,! = (r + 1)\,! - r\,!,\quad r = 1, 2, \ldots$$

να υπολογίσετε στη συνέχεια το άθροισμα

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + v - v! = \sum_{r=1}^{v} r\cdot r!.$$

4. Αφού πρώτα διαπιστώσετε ότι ισχύει η ταυτότητα

$$\frac{r}{(r+1)!} = \frac{1}{r!} - \frac{1}{(r+1)!},\quad r = 1, 2, \ldots$$

να υπολογίσετε στη συνέχεια το άθροισμα

$$\frac{1}{(1+1)!} + \frac{2}{(2+1)!} + \frac{3}{(3+1)!} + \ldots + \frac{v}{(v+1)!} = \sum_{r=1}^{v} \frac{r}{(r+1)!}.$$

5. Με πόσους τρόπους μπορούν να δημιουργήσουν ένα κύκλο χορού ν αντρόγυνα έτσι ώστε κάθε γυναίκα να βρίσκεται δίπλα στον σύζυγό της;

6. Σε ένα κυκλικό τραπέζι πρόκειται να γευματίσουν ν αγόρια και k κορίτσια.

α. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν στο τραπέζι τα ν + k άτομα;

β. Σε πόσες από τις τοποθετήσεις αυτές

i. δεν υπάρχει κορίτσι το οποίο να κάθεται δίπλα σε άλλο κορίτσι;

ii. το πρώτο από τα ν αγόρια κάθεται δίπλα στο πρώτο από τα k κορίτσια; ($1 \leq k \leq ν$)

iii. το αγόρι και το κορίτσι του ερωτήματος (ii) δεν κάθονται σε διαδοχικές θέσεις;

7. Ένα πολύεδρο με ν πλευρές ρίχνεται k φορές και καταγράφεται η ένδειξη του πολυέδρου που βρίσκεται στην κάτω του μεριά. Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα μπορούμε να πάρουμε αν

α. οι ενδείξεις που καταγράφονται τοποθετούνται στη σειρά ώστε να σχηματίσουν έναν k-ψήφιο αριθμό

i. χωρίς κανένα περιορισμό ως προς τα ψηφία του αριθμού ($ν \leq 9$);

ii. ο οποίος δεν έχει καθόλου ίδια ψηφία; ($1 \leq k \leq ν \leq 9$)

β. συλλέγονται οι ενδείξεις που καταγράφηκαν χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία προέκυψαν και

i. δεν υπάρχει κανένας επιπλέον περιορισμός;

ii. καμία ένδειξη δεν εμφανίστηκε περισσότερο από μία φορές; ($1 \leq k \leq ν$)

8. Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης «ΑΝΑΚΡΑΖΩ» υπάρχουν (συμπεριλαμβανομένης και της ίδιας) στους οποίους κανένα Α δεν βρίσκεται σε διαδοχική θέση με άλλο Α;

9. Έστω ν, k δύο θετικοί ακέραιοι αριθμοί με ν = 2.

α. Ποιος είναι ο αριθμός των μεταθέσεων των ν ειδών στοιχείων $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ καθένα από τα οποία χρησιμοποιείται k φορές;

β. Να δείξετε ότι ο αριθμός $(k!)^\nu$ διαιρεί τον ακέραιο αριθμό $(\nu k)!$.

10. Πόσα άτομα πρέπει να βρεθούν σε μια συγκέντρωση ώστε ο συνολικός αριθμός χειραψιών που θα ανταλλάξουν να είναι 105;

11. Να βρεθεί το πλήθος των διαφορετικών απεικονίσεων f από το πεπερασμένο σύνολο

$$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$$

στο πεπερασμένο σύνολο

$$B = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu\}.$$

Πόσες από τις απεικονίσεις αυτές είναι

α. αμφιμονοσήμαντες; $(1 \leq k \leq \nu)$

β. γνήσια αύξουσες; $(1 \leq k \leq \nu)$

γ. αύξουσες;

11. Να βρεθεί το πλήθος των διαφορετικών απεικονίσεων f από το πεπερασμένο σύνολο

$$A = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k\}$$

στο πεπερασμένο σύνολο

$$B = \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_\nu\}.$$

Πόσες από τις απεικονίσεις αυτές είναι

α. αμφιμονοσήμαντες; ($1 \le k \le \nu$)

β. γνήσια αύξουσες; ($1 \le k \le \nu$)

γ. αύξουσες;

12. Έστω $X = \{x_1, x_2, ..., x_\nu\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο με ν διαφορετικά στοιχεία και k θετικός ακέραιος με $1 \le k \le \nu$. Ας συμβολίσουμε με

$$p_\nu = \frac{(\nu)_k}{\nu^k},$$

το λόγο του αριθμού των διατάξεων των ν στοιχείων ανά k προς τον αριθμό των επαναληπτικών διατάξεων των ν στοιχείων ανά k. Έστω ακόμη

$$q_\nu = \frac{\binom{\nu}{k}}{\left[\begin{matrix}\nu \\ k\end{matrix}\right]}$$

ο αντίστοιχος λόγος για συνδυασμούς. Ποιο είναι το όριο των ακολουθιών p_ν, q_ν για $\nu \to \infty$;

13. Ένα τμήμα της αλυσίδας του DNA παριστάνεται ως μια σειρά με στοιχεία A, C, G, T που συμβολίζουν τις 4 βάσεις αδενίνη, κυτοσίνη, γουανίνη και θυμίνη αντίστοιχα. Πόσες διαφορετικές συνθέσεις μπορούν να προκύψουν για ένα τμήμα μήκους r αν σε αυτό υπάρχουν r_1 στοιχεία ίσα με A, r_2 στοιχεία ίσα με G, r_3 ίσα με C και r_4 ίσα με T ($r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$); Σε πόσα από τα τμήματα αυτά, τα στοιχεία που αντιστοιχούν σε καθεμία από τις τέσσερις βάσεις είναι συγκεντρωμένα όλα μαζί δηλαδή έχουμε για παράδειγμα, σχηματισμούς της μορφής

$$\underbrace{AA\ldots A}_{r_1}\underbrace{CC\ldots C}_{r_3}\underbrace{T\ldots T}_{r_4}\underbrace{G\ldots G}_{r_2} \quad \text{ή}$$

$$\underbrace{CC\ldots C}_{r_3}\underbrace{AA\ldots A}_{r_1}\underbrace{G\ldots G}_{r_2}\underbrace{T\ldots T}_{r_4} \quad \text{κ.ό.κ.}$$

14. Σε μια κλήρωση του Lotto τοποθετούνται στην κληρωτίδα 49 σφαίρες αριθμημένες από 1 έως 49. Στη συνέχεια κληρώνονται 6 από αυτούς οι οποίοι αποτελούν και την τυχερή εξάδα.

α. Πόσες διαφορετικές εξάδες μπορούν να κληρωθούν;

β. Αν έχουμε σημειώσει ν συγκεκριμένους αριθμούς ($6 \le \nu \le 49$) πόσες διαφορετικές κληρώσεις μπορούν να προκύψουν έτσι ώστε να περιέχονται σε αυτές

i. ακριβώς 5 από τους ν αριθμούς που σημειώσαμε στο δελτίο;

ii. ακριβώς 4 από τους ν αριθμούς που σημειώσαμε στο δελτίο;

15. Ένας αριθμός με $\nu + k$ ψηφία περιέχει ν ίδια ψηφία ενώ τα υπόλοιπα k ψηφία είναι ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους. Πόσοι διαφορετικοί τέτοιοι αριθμοί μπορούν να σχηματιστούν αν κανένα από τα ν ίδια ψηφία δεν μπορεί να τοποθετηθεί σε γειτονική θέση με άλλο ίδιο ψηφίο; Δίνεται ότι $\nu \leq k + 1$.

16. Ένα βράδυ ν φίλοι συμφώνησαν να συναντηθούν στον κινηματογράφο «Άστρον». Αν υπάρχουν k διαφορετικοί κινηματογράφοι με το όνομα αυτό, πόσοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους οι φίλοι μπορούν να διαλέξουν τον κινηματογράφο όπου θα πάνε; Αν $1 \leq \nu \leq k$, σε πόσες από αυτές τις επιλογές, τουλάχιστον δύο από τους φίλους θα συναντηθούν;

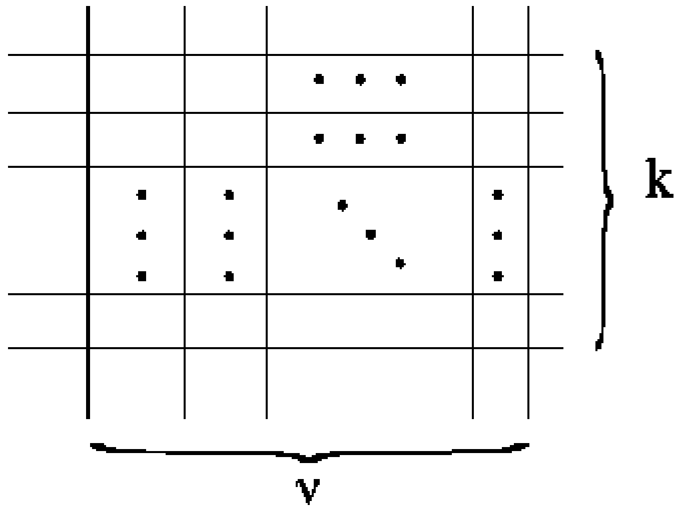
17. Για την πλήρωση $k \geq 1$ νέων θέσεων σε μια εταιρεία, εμφανίστηκαν $\nu \geq 1$ ενδιαφερόμενοι υποψήφιοι από τους οποίους οι r είναι γυναίκες ($1 \leq r \leq \nu$). Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή των νέων υπαλλήλων αν

α. δεν υπάρχει κανένας περιορισμός;

β. πρέπει να προσληφθούν ακριβώς $s \geq 1$ άνδρες ($1 \leq s \leq \nu - r$);

γ. είχε εκ των προτέρων αποφασιστεί ότι θα προσληφθούν οπωσδήποτε 2 συγκεκριμένες γυναίκες και 3 συγκεκριμένοι άντρες;

18. Σε ένα ορθογώνιο πλέγμα υπάρχουν ν κατακόρυφες και k οριζόντιες γραμμές όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Πόσα διαφορετικά ορθογώνια παραλληλόγραμμα υπάρχουν στο σχήμα;



19. Πόσους διαφορετικούς δυαδικούς αριθμούς μήκους ν + k μπορούμε να δημιουργήσουμε αν χρησιμοποιήσουμε ν το πλήθος σύμβολα «1» και k το πλήθος σύμβολα «0»; Αν $k \le \nu + 1$, σε πόσους από τους αριθμούς αυτούς

α. δεν εμφανίζονται διαδοχικά «0»;

β. υπάρχουν τουλάχιστον δύο «0» τα οποία είναι σε διαδοχικές θέσεις;

20. Πόσες διαφορετικές ελληνικές λέξεις $ν \geq 1$ γραμμάτων μπορούν να σχηματιστούν έτσι ώστε να περιέχουν ένα τουλάχιστον φωνήεν; Πόσες θα είναι οι λέξεις αυτές αν $ν \leq 17$ και δεν επιτρέπεται η χρήση κανενός γράμματος περισσότερες από μία φορές;

21. Το επταμελές συμβούλιο της Γ΄ Λυκείου ενός σχολείου πρόκειται να εκλεγεί από τους μαθητές των δύο τμημάτων της τάξης αυτής. Το πρώτο τμήμα έχει 10 κορίτσια και 15 αγόρια ενώ το δεύτερο έχει 16 αγόρια και 13 κορίτσια. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να σχηματιστεί το συμβούλιο έτσι ώστε να συμμετέχουν σε αυτό ακριβώς 4 μαθητές του 2ου τμήματος και ακριβώς 5 αγόρια;

22. α. Γράφοντας το τρίγωνο του Pascal στη μορφή (ειδική περίπτωση k = 5)

$$\binom{j}{5}-\binom{j-1}{5}=\binom{j-1}{4},\ j \geq 5$$

και προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις που προκύπτουν για j = 5, 6, ..., 10 διαπιστώστε ότι ισχύει

$$\binom{10}{5}=\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\ldots+\binom{9}{4}=\sum_{j=5}^{10}\binom{j-1}{4}$$

β. Χρησιμοποιώντας παρόμοια τεχνική, δείξτε ότι, για οποιουσδήποτε θετικούς ακέραιους ν, k με $1 \leq k \leq \nu$ ισχύει

$$\binom{\nu+1}{k+1}=\sum_{j=k}^{\nu}\binom{j}{k}$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας την προηγούμενη ταυτότητα για k = 1 και k = 2 δείξτε ότι

$$1+2+\ldots+\nu=\sum_{j=1}^{\nu} j=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+\ldots+\nu^2=\sum_{j=1}^{\nu} j^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}.$$

23.α. Από το τρίγωνο του Pascal (ειδική περίπτωση ν = 10)

$$\binom{11}{j} = \binom{10}{j} + \binom{10}{j-1}, \ j \leq 10$$

πολλαπλασιάζοντας επί $(-1)^j$, παίρνουμε

$$(-1)^j \binom{11}{j} = (-1)^j \binom{10}{j} - (-1)^{j-1} \binom{10}{j-1}, \ j \leq 10.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις που προκύπτουν για j = 1, 2, ..., 5 διαπιστώστε ότι ισχύει

$$\binom{10}{5} = \binom{11}{0} - \binom{11}{1} + \ldots - \binom{11}{5} = \sum_{j=0}^{5} (-1)^{5-j} \binom{11}{j}.$$

β. Χρησιμοποιώντας παρόμοια τεχνική, δείξτε ότι, για οποιουσδήποτε θετικούς ακέραιους ν, k με $1 \leq k \leq \nu$ ισχύει

$$\binom{\nu}{k} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{\nu+1}{j}.$$

24. Πόσοι διαφορετικοί 10-ψήφιοι αριθμοί μπορούν να σχηματιστούν χρησιμοποιώντας τα ψηφία 2, 3, 4, 5, 6, 8 αν

α. δεν υπάρχει κανένας περιορισμός;
β. κάθε ένα από τα μονά ψηφία εμφανίζεται ακριβώς 3 φορές, ενώ τα ζυγά μόνο μία;
γ. τα ψηφία εμφανίζονται στον αριθμό με αύξουσα σειρά;
δ. κάθε ψηφίο χρησιμοποιείται τουλάχιστον μια φορά και η σειρά εμφάνισης των ψηφίων στον αριθμό είναι αύξουσα;