ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Σ υ ν δ υ α σ τ ι κ ή

Πειραιάς 2007

Μάθημα 7ο

ΤΟ ΔΙΩΝΥΜΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Πρόταση (*τύπος του Νεύτωνα*)

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί και ν θετικός ακέραιος. Τότε το ανάπτυγμα της ν-οστης δύναμης του διωνύμου α + β δίνεται από τον τύπο

$$(\alpha+\beta)^{\nu} = \binom{\nu}{0}\alpha^{\nu} + \binom{\nu}{1}\alpha^{\nu-1}\beta + \ldots + \binom{\nu}{\nu-1}\alpha\beta^{\nu-1} + \binom{\nu}{\nu}\beta^{\nu}$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\alpha^{k}\beta^{\nu-k}$$

$$(\alpha+\beta)^{\nu} = \sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\alpha^{\nu-k}\beta^{k}.$$

Παράδειγμα 3.2.1

Να βρεθούν οι συντελεστές του $α^8$ στο ανάπτυγμα των παραστάσεων:

$$(a+2)^{15},\ (3a^2+5)^{15},\ \left(a+\frac{1}{a}\right)^{14}$$

Απάντηση

$$(\alpha+2)^{15}=\sum_{k=0}^{15}\binom{15}{2}\alpha^{k}2^{15-k}=\sum_{k=0}^{15}\left\{2^{15-k}\binom{15}{k}\right\}\alpha^{k}$$

οπότε ο συντελεστής του α^8 θα είναι ο

$$2^{15-8}\binom{15}{8}=2^{7}\frac{(15)_8}{8!}=5\cdot 2^{7}\cdot 3^{2}\cdot 11\cdot 13.$$

Απάντηση

$$\left(3\alpha^2+5\right)^{15}=\sum_{k=0}^{15}\binom{15}{k}\left(3\alpha^2\right)^k 5^{15-k}=\sum_{k=0}^{15}\left\{5^{15-k}3^k\binom{15}{k}\right\}\alpha^{2k}.$$

Ο συντελεστής του α^8 θα προκύπτει τώρα αν θέσουμε

$$2k=8,$$

δηλαδή

$$k=4.$$

Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι ο

$$5^{15-4}\cdot 3^4\binom{15}{4}=5^{11}\cdot 3^4\cdot\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}.$$

Απάντηση

$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^{14}=\sum_{k=0}^{14}\binom{14}{k}\alpha^{k}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{14-k}=\sum_{k=0}^{14}\binom{14}{k}\alpha^{2k-14}$$

και ο συντελεστής του α^8 θα βρίσκεται αν θέσουμε

$$2k - 14 = 8,$$

δηλαδή

$$k = 11.$$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι ο:

$$\binom{14}{11}=\binom{14}{14-11}=\binom{14}{3}=\frac{14\cdot 13\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Πρόταση
(*Διωνυμικό Θεώρημα*)

Έστω α, β, x πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $|\alpha|<|\beta|$. Τότε

$$(\alpha+\beta)^x=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{x}{k}\alpha^k\beta^{x-k}.$$

Πόρισμα

Έστω t πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $|t|<1$ και ν ένας θετικός ακέραιος. Τότε

$$\frac{1}{(1-t)^{\nu}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\nu+k-1}{k} t^k .$$

Απόδειξη

Για $\alpha = -t$, $\beta = 1$ και $x = -\nu$, παίρνουμε

$$\frac{1}{(1-t)^{\nu}} = (1-t)^{-\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\nu}{k} (-t)^{k} 1^{-\nu-k}$$

και αφού ισχύει

$$\binom{-\nu}{k} = (-1)^{k} \left[\begin{matrix} \nu \\ k \end{matrix}\right] = (-1)^{k} \binom{\nu+k-1}{k}$$

θα έχουμε

$$\frac{1}{(1-t)^{\nu}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \binom{\nu+k-1}{k} (-t)^{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\nu+k-1}{k} t^{k}.$$

Παράδειγμα 3.2.2

Να υπολογιστούν οι συντελεστές του t^k στο ανάπτυγμα των επόμενων συναρτήσεων σε δυνάμεις του t.

α. $f(t)=\left(\dfrac{t}{1-t}\right)^{\nu},\ |t|<1$

β. $g(t)=\dfrac{(1-t)^{-\nu}-1}{t},\ |t|<1$ και $t\neq 0.$

Απάντηση

$$f(t)=\frac{t^{v}}{(1-t)^{v}}=t^{v}\frac{1}{(1-t)^{v}}=t^{v}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{v+r-1}{r}t^{r}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{v+r-1}{r}t^{v+r}$$

ή ακόμη, θέτοντας $v + r = k$ (οπότε $r = k - v$)

$$f(t)=\sum_{k=v}^{\infty}\binom{k-1}{k-v}t^{k}.$$

Άρα ο συντελεστής του t^k, $k \geq v$ στο ανάπτυγμα της συνάρτησης $f(t)$ είναι ίσος με

$$\binom{k-1}{k-v}=\binom{k-1}{(k-1)-(k-v)}=\binom{k-1}{v-1},\ k\geq v.$$

Απάντηση

$$(1-t)^{-v}=\frac{1}{(1-t)^{v}}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{v+r-1}{r}t^{r}=1+\sum_{r=1}^{\infty}\binom{v+r-1}{r}t^{r}$$

οπότε

$$f(t)=\frac{\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\binom{v+r-1}{r}t^{r}\right)-1}{t}=\frac{\sum_{r=1}^{\infty}\binom{v+r-1}{r}t^{r}}{t}=\sum_{r=1}^{\infty}\binom{v+r-1}{r}t^{r-1}$$

ή ακόμη, κάνοντας την αντικατάσταση $r-1=k$ (οπότε $r=k+1$)

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{v+k}{k+1}t^{k}.$$

Άρα ο ζητούμενος συντελεστής είναι ίσος με:

$$\binom{v+k}{k+1}=\binom{v+k}{(v+k)-(k+1)}=\binom{v+k}{v-1},\ k\geq 0.$$

Ασκήσεις(σελίδα 136)

1. Να γραφούν τα αναπτύγματα των επόμενων παραστάσεων στη μορφή αθροίσματος δυνάμεων του α.

α. $(\alpha + 1)^4$

β. $(\alpha - 1)^4$

γ. $\left(\alpha + \dfrac{2}{\alpha}\right)^6$

δ. $\left(\alpha^2 + \dfrac{1}{\alpha}\right)^5$

ε. $\left(-\alpha + \dfrac{2}{\alpha^2}\right)^5$

στ. $\left(2\alpha^3 + \dfrac{3}{\alpha}\right)^6$

2. Να βρεθεί ο συντελεστής του όρου του διωνυμικού αναπτύγματος της παράστασης

$$\left(3x^5 - \frac{5}{x^3}\right)^{16}$$

ο οποίος είναι ανεξάρτητος της μεταβλητής x.

Ασκήσεις (σελίδα 136)

3. Αν t είναι ένας πραγματικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $|t| < 1$ να δειχτεί ότι

$$\frac{1}{\sqrt{1-t}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \left(t/4\right)^{k}.$$

$$\boxed{\binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^{k} 2^{-2k} \binom{2k}{k}}$$

4. Αν x είναι ένας πραγματικός αριθμός και k θετικός ακέραιος να δειχτεί ότι

$$x^{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (x-1)^{k-i} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i} \binom{k}{i} (x+1)^{k-i}.$$

5. Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $|x+y| < 1$ να δειχτεί ότι

$$\frac{1}{(1-x-y)^{v}} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=r}^{\infty} \binom{v+k-1}{k} \binom{k}{r} x^{r} y^{k-r}.$$