ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Σ υ ν δ υ α σ τ ι κ ή

Πειραιάς 2007

Μάθημα 6ο

ΔΙΩΝΥΜΙΚΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΑ

Παραγοντικό k τάξης

$$(\nu)_k = \nu\,(\nu - 1)\,\ldots\,(\nu - k + 1).$$

Το σύμβολο $(\nu)_k$ μπορεί άμεσα να επεκταθεί και για μη ακέραιες τιμές του ν. Πιο συγκεκριμένα, αν x είναι ένας πραγματικός αριθμός και k ένας θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε ως **παραγοντικό k τάξης** του ν την ποσότητα

$$(x)_\kappa = x\,(x - 1)\,\ldots\,(x - k + 1).$$

Για $k = 0$ θέτουμε $(x)_0 = 1$.

Είναι φανερό ότι όταν $x \in \mathbf{Z}$ τότε το $(x)_k$ είναι ένας ακέραιος αριθμός (θετικός ή αρνητικός) ενώ για μη ακέραιες τιμές του x, ο αριθμός $(x)_k$ δεν είναι απαραίτητα ακέραιος.

Ανοδικό παραγοντικό k τάξης

Αν στην

$$(x)_κ = x\,(x-1)\,\ldots\,(x-k+1)$$

θέσουμε, όπου x το $-x$ θα πάρουμε

$$(-x)_k = -x\,(-x-1)\,\ldots\,(-x-k+1) = (-1)^k\,x\,(x+1)\,\ldots\,(x+k-1).$$

Η ποσότητα $x\,(x+1)\,\ldots\,(x+k-1)$ που εμφανίζεται στο δεξί μέλος ονομάζεται **ανοδικό παραγοντικό k τάξης** του x και συμβολίζεται με $[x]_k$, δηλαδή

$$[x]_k = x\,(x+1)\,\ldots\,(x+k-1).$$

Για $k = 0$ θέτουμε $[x]_0 = 1$.

Πρόταση

Αν x είναι ένας πραγματικός αριθμός και k, r θετικοί ακέραιοι, τότε:

α. $(-x)_k = (-1)^k\,[x]_k.$

β. $[-x]_k = (-1)^k\,(x)_k.$

γ. $(x)_{k+r} = (x)_k\,(x-k)_r.$

δ. $[x]_{k+r} = [x]_k\,[x+k]_r.$

Απόδειξη

α. Έχει ήδη αποδειχθεί στην πορεία του ορισμού του συμβόλου $[x]_k$.
β. Προκύπτει άμεσα από το (α) θέτοντας το $–x$ στη θέση του x.
γ. Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}(x)_{k+r} &= x(x-1)\ldots(x-(k+r)+1) = x(x-1)\ldots(x-k-r+1) = \\ &= [x(x-1)\ldots(x-k+1)]\,[(x-k)(x-k-1)\ldots((x-k)-r+1)] = \\ &= (x)_k\,(x-k)_r.\end{aligned}$$

δ. Αν στην ταυτότητα που αποδείξαμε στο (γ) θέσουμε στη θέση του x το $–x$ βρίσκουμε

$$(-x)_{k+r} = (-x)_k\,(-x-k)_r$$

και κάνοντας χρήση του (α) προκύπτει ισοδύναμα

$$(-1)^{k+r}\,[x]_{k+r} = (-1)^k\,[x]_k\,(-1)^r\,[x+k]_r$$

ή ακόμη

$$[x]_{k+r} = [x]_k\,[x+k]_r.$$

$$\binom{v}{k} = \frac{(v)_k}{k!},$$

Διωνυμικοί συντελεστές

Για κάθε πραγματικό αριθμό x και κάθε θετικό ακέραιο k, ορίζουμε τις ποσότητες

$$\binom{x}{k} = \frac{(x)_k}{k!} = \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}$$

οι οποίες ονομάζονται **διωνυμικοί συντελεστές**. Όμοια ορίζουμε

$$\left[\begin{matrix} x \\ k \end{matrix}\right] = \frac{[x]_k}{k!} = \frac{x(x+1)\ldots(x+k-1)}{k!}.$$

Για $k = 0$ θέτουμε

$$\binom{x}{0} = \left[\begin{matrix} x \\ 0 \end{matrix}\right] = 1.$$

Πρόταση

Αν x είναι ένας πραγματικός αριθμός και k θετικός ακέραιος, τότε:

α. $\binom{-x}{k} = (-1)^k \left[\begin{matrix} x \\ k \end{matrix}\right]$

β. $\left[\begin{matrix} -x \\ k \end{matrix}\right] = (-1)^k \binom{x}{k}$

γ. $\binom{x}{k} = \left[\begin{matrix} x-k+1 \\ k \end{matrix}\right]$

δ. $\left[\begin{matrix} x \\ k \end{matrix}\right] = \binom{x+k-1}{k}$

$$\begin{bmatrix} -x \\ k \end{bmatrix} = (-1)^k \binom{x}{k}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} = \binom{x+k-1}{k}$$

Απόδειξη

γ. Έχουμε

$$\binom{x}{k} = \frac{x\cdot(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!} = \frac{(x-k+1)(x-k+2)\ldots x}{k!} =$$

$$= \frac{(x-k+1)\left[(x-k+1)+1\right]\ldots\left[(x-k+1)+k-1\right]}{k!} = \frac{\left[x-k+1\right]_k}{k!} =$$

$$= \begin{bmatrix} x-k+1 \\ k \end{bmatrix}$$

δ. Προκύπτει άμεσα αν στην (γ) θέσουμε το $x+k-1$ στη θέση του x, ή απευθείας ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία με την απόδειξη της (γ).

Θέματα εξετάσεων

Μέρος ΙΙΙ (4 θέματα πλήρους ανάπτυξης. Μέγιστος αριθμός μονάδων=40)

1. Να δείξετε ότι ισχύει η ταυτότητα $\binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^k\, 2^{-2k} \binom{2k}{k}$ για $k = 0,1,2,\ldots$.

Λύση:

Ισχύει,

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!} = \frac{(-1)^k\,\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2k-1}{2}}{k!}$$

$$= \frac{(-1)^k}{2^k}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{k!} = \frac{(-1)^k}{2^k\cdot k!}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots(2k-1)\cdot 2k}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2k}$$

$$= \frac{(-1)^k}{2^k\cdot k!}\cdot\frac{(2k)!}{2^k\cdot k!} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}}\cdot\frac{(2k)!}{k!\cdot k!} = (-1)^k\cdot 2^{-2k}\binom{2k}{k}.$$

Ασκήσεις **(**σελίδα 127-128**)**

1. Αν $x, y \in \mathbf{R}$ και k θετικός ακέραιος να αποδειχτούν οι επόμενες ταυτότητες

$$(x + y)_2 = (x)_2 + 2\,(x)_1\,(y)_1 + (y)_2$$
$$(x + y)_3 = (x)_3 + 3(x)_2\,(y)_1 + 3(x)_1\,(y)_2 + (y)_3.$$

Τι παρατηρείτε;

2. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbf{R}$ μηδενίζονται οι επόμενες ποσότητες

α. $(x)_k$
β. $[x]_k$
γ. $(x)_k \cdot [x]_k$
δ. $\{(x)_k\}^2 + \{[x]_k\}^2$

Το k είναι δεδομένος θετικός ακέραιος.

Ασκήσεις(σελίδα 127-128)

3. Αν x είναι ένας πραγματικός αριθμός και k θετικός ακέραιος, να διαπιστώσετε ότι ισχύουν οι επόμενες ισότητες

α. $k\binom{x}{k} = x\binom{x-1}{k-1},\ k \geq 1$

β. $\binom{x}{k} = \frac{x-k+1}{k}\binom{x}{k-1},\ k \geq 1$

γ. $\binom{x}{k} = \frac{x}{x-k}\binom{x-1}{k},\ k \geq 0 \text{ και } x \neq k$

δ. $\binom{x}{k}\binom{k}{r} = \binom{x}{r}\binom{x-r}{k-r},\ r \leq k$

ε. $(k)_r\binom{x}{k} = (x)_r\binom{x-r}{k-r},\ \ r \leq k$

στ. $x\binom{x}{k} = (k+1)\binom{x}{k+1} + k\binom{x}{k} = k\binom{x+1}{k+1} + \binom{x}{k+1}$

ζ. $\binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^k 2^{-2k}\binom{2k}{k}$

Ασκήσεις(σελίδα 127-128)

4. Αν x είναι ένας πραγματικός αριθμός και k θετικός ακέραιος να δείξετε ότι

α. $$\binom{x}{k} = \binom{x}{k-1} + \binom{x-1}{k-1}$$

β. $$\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ k-1 \end{bmatrix}$$

γ. $$\binom{x+1}{k} = \binom{x}{k-1} + \binom{x-1}{k} + \binom{x-1}{k-1}$$

Ασκήσεις (σελίδα 127-128)

5. Έστω x ένας πραγματικός αριθμός και k θετικός ακέραιος.

α. Δείξτε ότι

$$(x + k)\,(x + k)_k = \alpha_{k+1} - \alpha_k$$

όπου

$$\alpha_k = (x + k)_k,\; k = 0,1,2,\ldots$$

β. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{v} (x+k)(x+k)_k = (x+v+1)_{v+1} - 1$$

και συμπεραίνετε ως ειδική περίπτωση την ταυτότητα

$$\sum_{k=0}^{v} k \cdot k! = (v+1)! - 1$$

Ασκήσεις(σελίδα 127-128)

6. Έστω x ένας πραγματικός αριθμός και k θετικός ακέραιος.

α. Δείξτε ότι

$$\frac{x+k}{(x+k+1)_{k+1}} = b_k - b_{k+1}$$

όπου

$$\beta_k = \frac{1}{(x+k)_k}, \ k = 0,1,2,\ldots$$

β. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\nu} \frac{x+k}{(x+k+1)_{k+1}} = 1 - \frac{1}{(x+\nu+1)_{\nu+1}}$$

και συμπεράνετε ως ειδική περίπτωση την ταυτότητα

$$\sum_{k=0}^{\nu} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(\nu+1)!}$$