ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Σ υ ν δ υ α σ τ ι κ ή

Πειραιάς 2007

Μάθημα 4ο

Συνδυασμοί

2.3 ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

Έστω X= $\{x_1, x_2, ..., x_\nu\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο με ν στοιχεία $x_1, x_2, ..., x_\nu$ και k ένας θετικός ακέραιος μικρότερος ή ίσος του ν ($k \leq \nu$).

Συνδυασμός των ν στοιχείων ανά k ή απλούστερα συνδυασμός των ν και k λέγεται κάθε (μη διατεταγμένη) συλλογή αποτελούμενη από k διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ του X.

2.3 ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

Χρησιμοποιώντας ορολογία της θεωρίας συνόλων, μπορούμε να πούμε ότι ο συνδυασμός των ν στοιχείων ανά k είναι ένα υποσύνολο Α το συνόλου Χ με πληθικό αριθμό ίσο με k, πιο συγκεκριμένα

$$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$$

όπου

$$\alpha_i \in X, \; i = 1, 2, .., k.$$

Το πλήθος των συνδυασμών των ν στοιχείων ανά k θα συμβολίζεται με

$$\binom{\nu}{k}.$$

Παράδειγμα

$$X = \{ α, β, γ, δ \}, \qquad ν = 4 \text{ στοιχεία}$$

Οι συνδυασμοί των στοιχείων ανά 2 ($k = 2$) είναι τα υποσύνολα

$$\{ α, β \}, \{ α, γ \}, \{ α, δ \}, \{ β, γ \}, \{ β, δ \}, \{ γ, δ \}$$

ενώ οι συνδυασμοί των 4 στοιχείων ανά 3 ($k = 3$) είναι οι

$$\{ α, β, γ \}, \{ α, β, δ \}, \{ α, γ, δ \}, \{ β, γ, δ \}.$$

Επομένως

$$\boxed{\binom{4}{2} = 6, \qquad \binom{4}{3} = 4.}$$

Διαφορά μεταξύ διατάξεων και συνδυασμών

Σε μια διάταξη μας ενδιαφέρει η ακριβής σειρά με την οποία είναι γραμμένα τα στοιχεία που περιέχει ενώ σε ένα συνδυασμό η σειρά καταγραφής των στοιχείων δεν παίζει κανένα ρόλο. Αυτή η διαπίστωση οδηγεί άμεσα στην επόμενη διαδικασία δημιουργίας των διατάξεων των ν στοιχείων ανά k.

Διαδικασία δημιουργίας των διατάξεων των ν στοιχείων ανά k

Βήμα 1. Επιλογή k στοιχείων από τα ν που περιέχει το σύνολο Χ (δημιουργία ενός **συνδυασμού** των ν στοιχείων ανά k).

Βήμα 2. Τοποθέτηση των k στοιχείων που επιλέχτηκαν στο Βήμα 1 με όλες τις δυνατές διαφορετικές σειρές (καταγραφή όλων των δυνατών **μεταθέσεων** των k στοιχείων που διαλέξαμε).

Παράδειγμα (ν=4, κ=2)

Συνδυασμός	Παραγόμενες διατάξεις
$\{\alpha, \beta\}$	(α, β)
	(β, α)
$\{\alpha, \gamma\}$	(α, γ)
	(γ, α)
$\{\alpha, \delta\}$	(α, δ)
	(δ, α)
$\{\beta, \gamma\}$	(β, γ)
	(γ, β)
$\{\beta, \delta\}$	(β, δ)
	(δ, β)
$\{\gamma, \delta\}$	(γ, δ)
	(δ, γ)

$$(4)_2 = \binom{4}{2} \cdot 2!, \qquad \binom{4}{2} = \frac{(4)_2}{2!}$$

Παράδειγμα (ν=4, κ=2)

Από κάθε συνδυασμό των $\nu = 4$ στοιχείων ανά $k = 2$, παράγονται $k! = 2! = 1 \cdot 2$ διατάξεις των ν στοιχείων ανά k. Επομένως

- το πλήθος των διατάξεων των $\nu = 4$ στοιχείων ανά $k = 2$ θα προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό των συνδυασμών των ν στοιχείων ανά k επί $2 = 2! = k!$
  και αντίστροφα
- το πλήθος των συνδυασμών των $\nu = 4$ στοιχείων ανά $k = 2$ θα προκύπτει αν διαιρέσουμε τον αριθμό των διατάξεων των ν στοιχείων ανά k με τον αριθμό $2 = 2! = k!$.

Γενίκευση για οποιαδήποτε ν και k (με $1 \leq k \leq ν$)

- Το Βήμα 1 μπορεί να γίνει με $ν_1 = \binom{ν}{k}$ διαφορετικούς τρόπους.
- Για κάθε αποτέλεσμα του Βήματος 1, υπάρχουν $ν_2 = k!$ διαφορετικοί τρόποι πραγματοποίησης του Βήματος 2.
- Η ολοκλήρωση και των δυο βημάτων μπορεί να γίνει με

$$ν_1 \cdot ν_2 = \binom{ν}{k} \cdot k!$$

διαφορετικούς τρόπους.

Επομένως θα πρέπει να έχουμε

$$ν_1 \cdot ν_2 = (ν)_k .$$

Επομένως

$$\binom{ν}{k} \cdot k! = (ν)_k \quad \Leftrightarrow \quad \binom{ν}{k} = \frac{(ν)_k}{k!} .$$

- **Βήμα 1**. Επιλογή k στοιχείων από τα ν που περιέχει το σύνολο Χ (δημιουργία ενός **συνδυασμού** των ν στοιχείων ανά k).
- **Βήμα 2**. Τοποθέτηση των k στοιχείων που επιλέχτηκαν στο Βήμα 1 με όλες τις δυνατές διαφορετικές σειρές (καταγραφή όλων των δυνατών **μεταθέσεων** των k στοιχείων που διαλέξαμε).

Πρόταση

Ο αριθμός $\binom{v}{k}$ των συνδυασμών των v στοιχείων ανά k δίνεται από τον τύπο

$$\binom{v}{k} = \frac{(v)_k}{k!} = \frac{v(v-1)\dots(v-k+1)}{k!}$$

$$1 \le k \le v.$$

$$= \frac{v!}{k!(v-k)!}$$

Συμβάσεις

- Για $k = 0$ θέτουμε (σύμβαση)

$$\binom{v}{0} = \frac{(v)_0}{0!} = \frac{1}{1} = 1.$$

- Στην περίπτωση $k > v$ δεν μπορούμε να δημιουργήσουμε κανένα συνδυασμό των v στοιχείων ανά k, αφού δεν υπάρχουν k διαφορετικά στοιχεία για να χρησιμοποιηθούν. Έτσι θέτουμε

$$\binom{v}{k} = 0 \text{ για } k > v.$$

Ειδικές περιπτώσεις

$$\binom{\nu}{1} = \frac{\nu!}{1!(\nu-1)!} = \frac{\nu!}{(\nu-1)!} = \nu$$

$$\binom{\nu}{\nu} = \frac{(\nu)_\nu}{\nu!} = \frac{\nu!}{\nu!} = 1$$

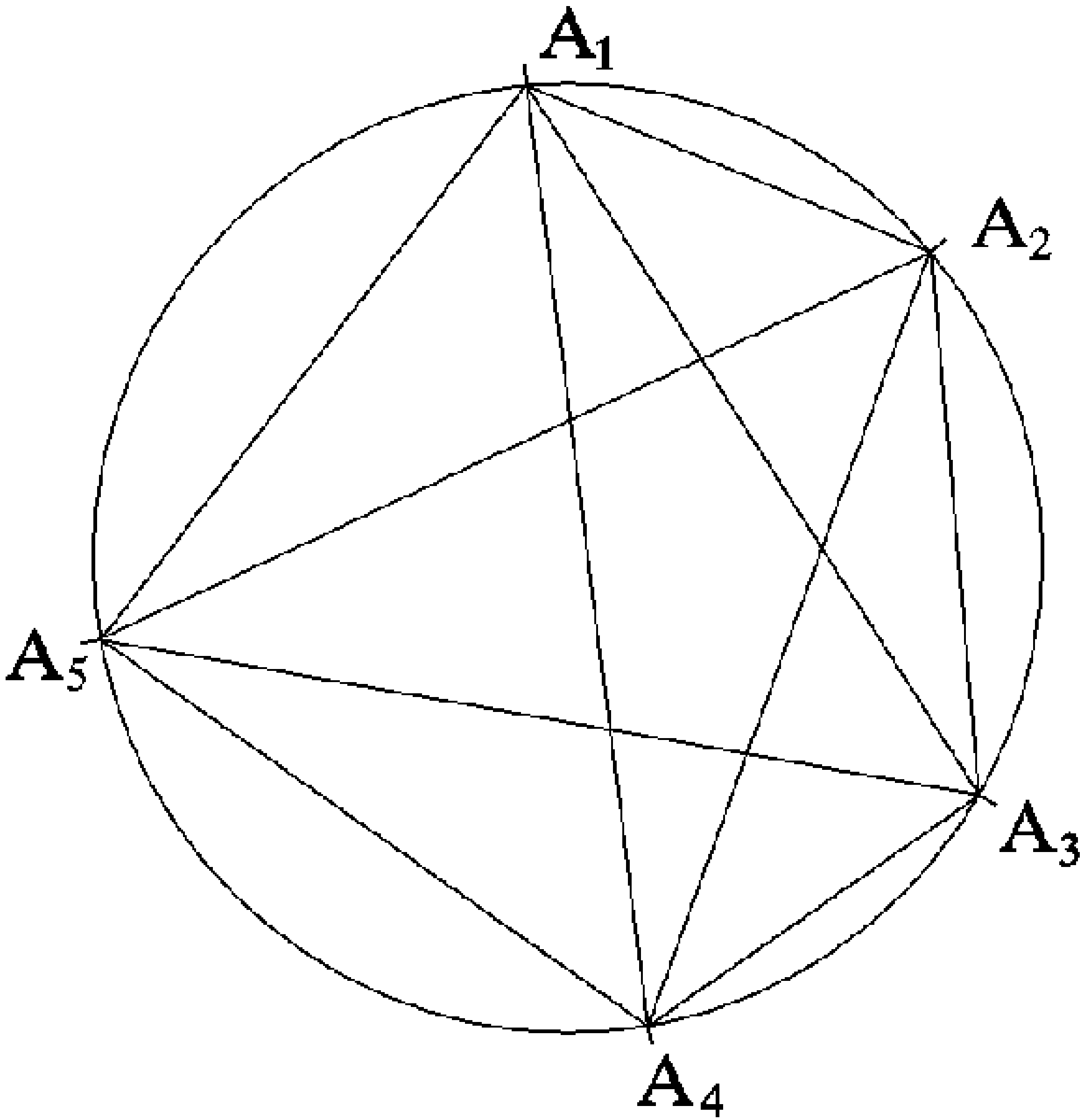
$$\binom{\nu}{\nu-1} = \frac{\nu!}{(\nu-1)!(\nu-(\nu-1))!} = \frac{\nu!}{(\nu-1)!1!} = \nu.$$

Ο αριθμός των συνδυασμών $\binom{v}{k}$

v/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Παράδειγμα 2.3.1

Επάνω στην περιφέρεια ενός κύκλου υπάρχουν ν σημεία. Πόσα διαφορετικά τρίγωνα μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα σημεία αυτά;


A1
A2
A3
A4
A5

Αν συμβολίσουμε με $A_1, A_2, ..., A_\nu$ τα ν σημεία της περιφέρειας του κύκλου, κάθε ένα από τα τρίγωνα που ζητάμε αντιστοιχεί στην επιλογή οποιωνδήποτε τριών από τα ν σημεία. Επομένως εκείνο το οποίο μας ενδιαφέρει είναι οι συνδυασμοί των ν στοιχείων του συνόλου $X = \{A_1, A_2, ..., A_\nu\}$ ανά $k = 3$ και το πλήθος τους θα δίνεται από τον τύπο

$$\binom{\nu}{3} = \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{3!} = \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{6}.$$

Για παράδειγμα, στην ειδική περίπτωση $\nu = 5$ θα υπάρχουν

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$$

διαφορετικά τρίγωνα

Παράδειγμα 2.3.2

Μια εταιρεία θέλει να προσλάβει 5 νέους υπαλλήλους. Μετά την προκήρυξη των νέων θέσεων υπέβαλαν αίτηση 7 γυναίκες και 8 άνδρες. Να υπολογιστούν οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να γίνει η επιλογή των 5 νέων υπάλληλων

α. αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.

β. αν πρέπει να προσληφθούν ακριβώς 2 γυναίκες.

γ. αν πρέπει να προσληφθούν τουλάχιστον 3 άνδρες.

δ. αν υποθέσουμε ότι μεταξύ των υποψηφίων υπάρχει ένα αντρόγυνο και δεν επιτρέπεται η πρόσληψη και των δύο συζύγων συγχρόνως.

Απάντηση

$$X_1 = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_7\} \qquad X_2 = \{A_1, A_2, \ldots, A_8\}$$

α. χωρίς κανένα περιορισμό

α. Ζητάμε τους συνδυασμούς των ν = 7 + 8 = 15 στοιχείων του $X = X_1 \cup X_2$ ανά $k = 5$. Το πλήθος των διαφορετικών επιλογών είναι

$$\binom{15}{3} = \frac{(15)_5}{5!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 3.003$$

β. Η επιλογή των γυναικών μπορεί να γίνει κατά

β. πρέπει να προσληφθούν ακριβώς 2 γυναίκες

$$\binom{7}{2} = \frac{(7)_2}{2!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

τρόπους. Όμοια η επιλογή των 5 – 2 = 3 ανδρών που απαιτούνται για να συμπληρωθούν οι 5 θέσεις, μπορεί να γίνει με

$$\binom{8}{3} = \frac{(8)_3}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$$

τρόπους. Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, ο ζητούμενος αριθμός θα είναι ίσος με

$$\binom{7}{2} \cdot \binom{8}{3} = 21 \cdot 56 = 1.176.$$

γ. Υπάρχουν **τρεις ξένες μεταξύ** τους περιπτώσεις με τις οποίες μπορεί να πραγματοποιηθεί το ζητούμενο:

- να προσληφθούν 3 άνδρες και 2 γυναίκες
- να προσληφθούν 4 άνδρες και 1 γυναίκα
- να προσληφθούν 5 άνδρες και καμία γυναίκα.

γ. πρέπει να προσληφθούν τουλάχιστον 3 άνδρες

Το πλήθος των διαφορετικών τρόπων που αντιστοιχούν σε κάθε περίπτωση είναι αντίστοιχα:

$$\binom{8}{3}\cdot\binom{7}{2}=1.176$$

$$\binom{8}{4}\binom{7}{1}=\frac{(8)_4}{4!}\cdot 7=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 7=490$$

$$\binom{8}{5}\binom{1}{0}=\frac{(8)_5}{5!}\cdot 1=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=56$$

Επομένως, σύμφωνα με την **αρχή του αθροίσματος**, το ζητούμενο πλήθος θα είναι:

$$1.176 + 490 + 56 = 1.722.$$

δ. μεταξύ των υποψηφίων υπάρχει ένα αντρόγυνο και δεν επιτρέπεται η πρόσληψη και των δύο συζύγων συγχρόνως

δ. Ας θεωρήσουμε ότι το ανδρόγυνο είναι τα άτομα A_1, $Γ_1$ και ας ορίσουμε τα επόμενα σύνολα:

Ω: συνδυασμοί των ν= 15 στοιχείων του $X = X_1 \cup X_2$ ανά $k = 3$ (βασικό σύνολο)

B: συνδυασμοί των ν = 15 στοιχείων του $X = X_1 \cup X_2$ ανά $k = 3$ στους οποίους συμμετέχουν και οι δύο σύζυγοι A_1, $Γ_1$.

Το ζητούμενο πλήθος αντιστοιχεί στον πληθικό αριθμό του συνόλου Β΄, ο οποίος, σύμφωνα θα δίνεται από τον τύπο

$$|B'| = |\Omega| - |B|.$$

Όμως $|\Omega| = 3.003$ ενώ για την εύρεση του $|B|$, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, δεδομένου ότι τα άτομα A_1, $Γ_1$ ήδη έχουν επιλεγεί, η πεντάδα των νέων υπαλλήλων θα πρέπει να συμπληρωθεί με 3 άτομα από τα (8-1)+(7-1)=13 που απέμεινα. Άρα:

$$|B| = \binom{13}{3} = \frac{(13)_3}{3!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 286 \Rightarrow |B'| = |\Omega| - |B| = 3.003 - 286 = 2.717.$$

Πρόταση

Για τους αριθμούς $\binom{\nu}{k}$, $1 \leq k \leq \nu$ των συνδυασμών των ν στοιχείων ανά k ισχύουν οι επόμενες ισότητες

α. $$\binom{\nu}{k} = \binom{\nu}{\nu - k}$$

β. $$\binom{\nu}{k} = \binom{\nu - 1}{k - 1} + \binom{\nu - 1}{k}$$

Απόδειξη

α. $\binom{v}{v-k} = \frac{v!}{(v-k)!(v-(v-k))!} = \frac{v!}{(v-k)!k!} = \binom{v}{k}$

β.

$$\binom{v-1}{k-1} + \binom{v-1}{k} = \frac{(v-1)!}{(k-1)!(v-k)!} + \frac{(v-1)!}{k!(v-k-1)!} = \frac{(v-1)!k}{k!(v-k)!} + \frac{(v-1)!(v-k)}{k!(v-k)!} =$$

$$= \frac{(v-1)!\left[k+(v-k)\right]}{k!(v-k)!} = \frac{(v-1)!v}{k!(v-k)!} = \frac{v!}{k!(v-k)!} = \binom{v}{k}.$$

Η σχέση (β) ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο και για k =1, k =v αφού σε αυτές τις περιπτώσεις προκύπτει

$\binom{v}{1} = \binom{v-1}{0} + \binom{v-1}{1}$ ή ισοδύναμα v = 1 + (v - 1)

$\binom{v}{v} = \binom{v-1}{v-1} + \binom{v-1}{v}$ ή ισοδύναμα 1 = 1 + 0

Η ταυτότητα (α) διευκολύνει το γρήγορο υπολογισμό των ποσοτήτων $\binom{\nu}{k}$ όταν το ν είναι μεγάλο και το k παίρνει τιμές κοντά στο ν.

Για παράδειγμα

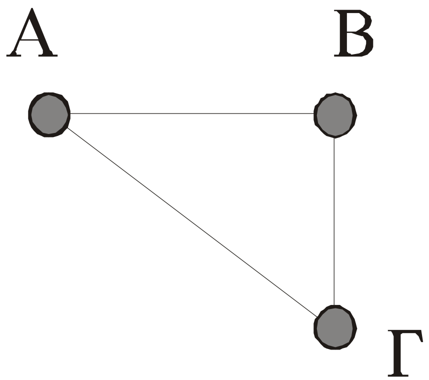
$$\binom{80}{76} = \frac{(80)_{76}}{76!} = \frac{80 \cdot 79 \cdot 78 \cdots 5}{76 \cdot 75 \cdots 2 \cdot 1}$$

$$\binom{80}{76} = \binom{80}{80-76} = \binom{80}{4} = \frac{(80)_4}{4!} = \frac{80 \cdot 79 \cdot 78 \cdot 77}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

· · · k–1 k · · ·

·
·
·
ν-1

ν
·
·
·



$$\binom{v}{k}=\binom{v-1}{k-1}+\binom{v-1}{k}$$

ν/k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Το τριγωνο του Pascal

$$\binom{v}{k} = \binom{v-1}{k-1} + \binom{v-1}{k}$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 $\boxed{6 \quad 4}$ 1

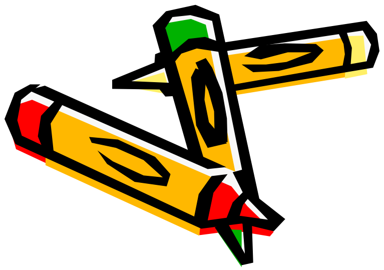
$\Downarrow$

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

. . . .

v/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1



Θέματα εξετάσεων

1. Αν ν και k είναι θετικοί ακέραιοι με $1 \le k \le \nu$ τότε $\binom{n}{k} = \frac{(\nu + k - 1)_k}{k!}$.

Συμπληρώστε **Σ** ή **Λ**

2. Το πλήθος των διατάξεων των ν στοιχείων ανά k $(1 \le k \le \nu)$ δίνεται από τον τύπο

$$(\nu)_k = \binom{n}{k} k!$$

Συμπληρώστε **Σ** ή **Λ**

Θέματα εξετάσεων

1. Αν θεωρήσουμε επάνω σε ένα επίπεδο v σημεία, πόσα διαφορετικά τρίγωνα μπορούμε να σχηματίσουμε, χρησιμοποιώντας τα σημεία αυτά;

Συμπληρώστε **α**, **β**, **γ**,**δ** ή **ε**
α

α. $\dfrac{v(v-1)(v-2)}{6}$ **β.** $n(n-1)(n-2)$

γ. $\dfrac{v(v-1)}{2}$ **δ.** 2^{v} **ε.** $v!$

2. Να δείξετε ότι ισχύει η ταυτότητα

$$(v-k)\binom{v}{k} = (k+1)\binom{v}{k+1}$$

και στη συνέχεια ....

Ασκήσεις (σελίδες 80-81)

1. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να ανταλλάξουν χειραψίες ν άτομα;

2. Επάνω στην περιφέρεια ενός κύκλου υπάρχουν ν σημεία. Πόσα διαφορετικά κυρτά k-γωνα (πολύγωνα με k κορυφές) μπορούμε να δημιουργήσουμε χρησιμοποιώντας ως κορυφές k από αυτά τα σημεία; Πόσα από τα πολύγωνα αυτά έχουν ως κορυφή ένα συγκεκριμένο από τα k σημεία;

Ασκήσεις (σελίδες 80-81)

3. Αν ν, k είναι θετικοί ακέραιοι, να αποδειχτούν οι επόμενες ταυτότητες.

α. $k\binom{\nu}{k}=\nu\binom{\nu-1}{k-1}$, $1\le k\le \nu$.

β. $\binom{\nu}{k}=\dfrac{\nu-k+1}{k}\binom{\nu}{k-1}$, $1\le k\le \nu$.

γ. $\binom{n}{k}=\dfrac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}$, $1\le k\le n$

δ. $\binom{\nu}{k}\binom{k}{r}=\binom{\nu}{r}\binom{\nu-r}{k-r}$, $0\le r\le k\le \nu$.

ε. $(k)_r\binom{\nu}{k}=(\nu)_r\binom{\nu-r}{k-r}$, $0\le r\le k\le \nu$.

στ. $\nu\binom{\nu}{k}=(k+1)\binom{\nu}{k+1}+k\binom{\nu}{k}=k\binom{\nu+1}{k+1}+\binom{\nu}{k+1}$.

Ασκήσεις(σελίδες 80-81)

4. Να βρεθεί η τιμή του ακέραιου θετικού αριθμού k για τον οποίο ισχύει

$$\frac{1}{\binom{9}{k}} - \frac{1}{\binom{10}{k}} = \frac{11}{6\binom{11}{k}}.$$

5. Από τους 20 εργαζόμενους μιας μικρής επιχείρησης οι 5 είναι γυναίκες. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να επιλέγουν 2 γυναίκες και 6 άνδρες έτσι ώστε

α. να συσταθεί μια οκταμελής επιτροπή;

β. να τοποθετηθούν στις 8 αμειβόμενες με διαφορετικούς μισθούς θέσεις μιας ομάδας εργασίας;

6. Αν φέρουμε 6 παράλληλες μεταξύ τους ευθείες και στη συνέχεια 5 άλλες ευθείες οι οποίες τέμνουν τις 6 πρώτες και είναι παράλληλες μεταξύ τους, πόσα διαφορετικά παραλληλόγραμμα θα σχηματιστούν;

Ασκήσεις **(**σελίδες 80-81**)**

7. Σε ένα τμήμα του πανεπιστημίου υπάρχουν $r + k$ διδάσκοντες εκ των οποίων οι r είναι άνδρες. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να συσταθεί μια ν-μελης επιτροπή έτσι ώστε να συμμετέχει

α. τουλάχιστον ένας άνδρας;

β. τουλάχιστον μια γυναίκα;

8. Σε μια εταιρεία εργάζονται 10 άνδρες και 4 γυναίκες. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να εκλεγεί ο πρόεδρος, ο γραμματέας και ο ταμίας του διοικητικού συμβουλίου της εταιρείας αν είναι υποχρεωτικό να συμμετέχει σε αυτό τουλάχιστον μια γυναίκα;

Ασκήσεις **(**σελίδες 80-81**)**

9. Ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής χρησιμοποιεί για την εσωτερική αναπαράσταση των πληροφοριών, «λέξεις» οι οποίες αποτελούνται από οκτάδες ψηφίων 0-1, π.χ. 10010110, 11001010 κ.λ.π.

α. Πόσες διαφορετικές λέξεις υπάρχουν, τέτοιες ώστε k ($0 \leq k \leq 8$) από τα ψηφία τους να είναι «0» και τα υπόλοιπα ν - k να είναι «1»;

β. Αθροίζοντας τους αριθμούς που βρήκατε στο (α) βρείτε το πλήθος των διαφορετικών λέξεων που υπάρχουν. Επαληθεύστε το αποτέλεσμα κάνοντας χρήση της πολλαπλασιαστικής αρχής.

Ασκήσεις **(**σελίδες 80-81**)**

10. Έστω X ένα πεπερασμένο σύνολο με ν στοιχεία, α ένα συγκεκριμένο στοιχείο του X και k θετικός ακέραιος μικρότερος του ν.

α. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί συνδυασμοί των ν στοιχείων του X ανά k οι οποίοι περιέχουν οπωσδήποτε το στοιχείο α;

β. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί συνδυασμοί των ν στοιχείων του X ανά k οι οποίοι δεν περιέχουν το στοιχείο α;

γ. Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα που βρήκατε στο (α) και (β) διαπιστώστε την ισχύ της ταυτότητας (τρίγωνο του Pascal)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$