ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Σ υ ν δ υ α σ τ ι κ ή

Πειραιάς 2007

Μάθημα 3ο

Διατάξεις και μεταθέσεις

ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ-ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ-ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

2.1 Διατάξεις και μεταθέσεις

~~*2.2 Κυκλικές διατάξεις*~~

2.3 Συνδυασμοί

2.4 Διατάξεις με επανάληψη στοιχείων

2.5 Επαναληπτικοί συνδυασμοί

2.1 ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

Έστω X= $\{x_1, x_2, ..., x_\nu\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο με ν στοιχεία x_1, x_2, ..., x_ν και k ένας θετικός ακέραιος μικρότερος ή ίσος του ν ($k \leq \nu$).

Διάταξη των ν στοιχείων ή απλούστερα διάταξη των ν ανά k λέγεται κάθε διατεταγμένη k-αδα $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ που αποτελείται από k διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία του X, δηλαδή

$$\alpha_1 \in X, \alpha_2 \in X, ..., \alpha_k \in X$$

και $\alpha_i \neq \alpha_j$ για $i \neq j$.

Στην περίπτωση $k = \nu$, αντί του όρου «διάταξη των ν ανά ν» χρησιμοποιούμε συνήθως τον όρο **μετάθεση** των ν στοιχείων.

Το πλήθος των διατάξεων των ν στοιχείων ανά k συμβολίζεται με $(\nu)_k$.

Παράδειγμα 2.1.1

X ={α, β, γ} , (ν =3).

Διατάξεις των ν=3 στοιχείων ανά $k = 2$

(α, β), (α, γ), (β, α), (β, γ), (γ, α), (γ, β),

Μεταθέσεις των ν = 3

(α, β, γ), (α, γ, β), (β, α, γ), (β, γ, α), (γ, α, β), (γ, β, α).

Επομένως

$$(3)_2 = 6, \quad (3)_3 = 6.$$

Παράδειγμα 2.1.2

Στα τελικά (play offs) του πρωταθλήματος μπάσκετ έχουν προκριθεί οι εξής τέσσερις ομάδες:

Παναθηναϊκός (Π), Ολυμπιακός (Ο),

ΑΕΚ (Α) και Ηρακλής (Η).

α. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να προκύψει το ζευγάρι πρωταθλητή - δευτεραθλητή;

β. Πόσοι διαφορετικοί τρόποι κατάταξης μπορούν να προκύψουν για τις 4 ομάδες που συμμετέχουν στα τελικά του πρωταθλήματος;

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να προκύψει το ζευγάρι πρωταθλητή - δευτεραθλητή;

Απάντηση

α. Εδώ ζητάμε τα διατεταγμένα ζεύγη (α_1, α_2) με

$$\alpha_1 \neq \alpha_2 \text{ και } \alpha_1, \alpha_2, \in X = \{\Pi, O, A, H\}.$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι τα διάφορα ζεύγη που μπορούν να προκύψουν είναι τα:

$$(\Pi, O), (\Pi, A), (\Pi, H), (O, \Pi), (O, A), (O, H)$$
$$(A, \Pi), (A, O), (A, H), (H, \Pi), (H, O), (H, A)$$

όπου το ζεύγος (Π, Ο) σημαίνει ότι πρωταθλητής ανακηρύχτηκε ο Παναθηναϊκός με δεύτερο στην κατάταξη τον Ολυμπιακό, το ζεύγος (Ο, Π) σημαίνει ότι πρωταθλητής ανακηρύχτηκε ο Ολυμπιακός με δεύτερο τον Παναθηναϊκό κοκ. Το ζητούμενο πλήθος είναι ίσο με

$$(4)_2 = 12.$$

Απάντηση

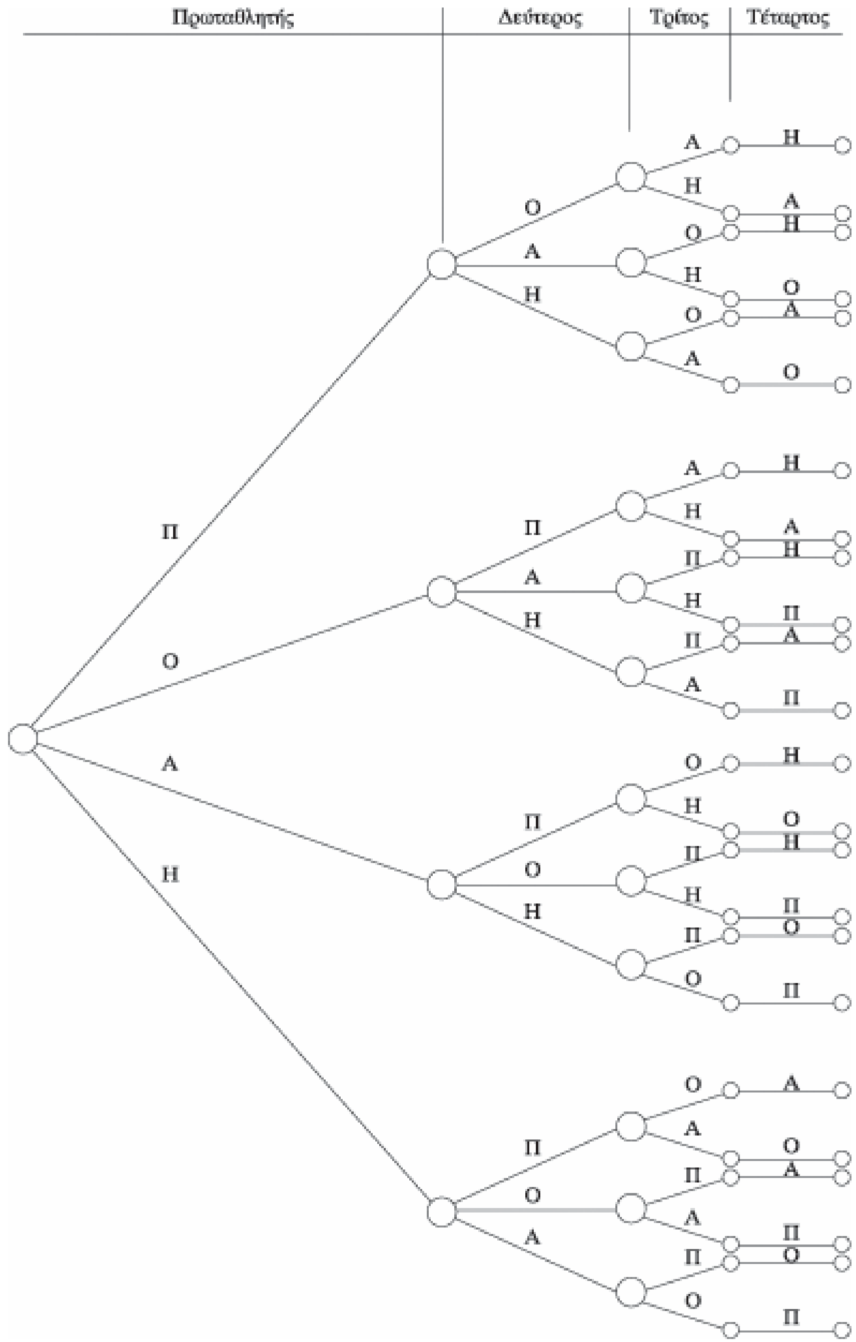
- **Πόσοι διαφορετικοί τρόποι κατάταξης μπορούν να προκύψουν για τις 4 ομάδες που συμμετέχουν στα τελικά του πρωταθλήματος;**

β. Εδώ ζητάμε όλες τις διατεταγμένες τετράδες (α_1, α_2, α_3, α_4) με $\alpha_i \neq \alpha_j$ για $i \neq j$ και $\alpha_i \in X$, i = 1, 2, 3, 4. Αφού ν = k = 4 πρόκειται για τις μεταθέσεις των ν = 4 στοιχείων του X:

(Π, Ο, Α, Η), (Π, Ο, Η, Α), (Π, Α, Ο, Η),
(Π, Α, Η, Ο), (Π, Η, Ο, Α), (Π, Η, Α, Ο),
(Ο, Π, Α, Η), (Ο, Π, Η, Α), (Ο, Α, Π, Η),
(Ο, Α, Η, Π), (Ο, Η, Π, Α), (Ο, Η, Α, Π),
(Α, Π, Ο, Η), (Α, Π, Η, Ο), (Α, Ο, Π, Η),
(Α, Ο, Η, Π), (Α, Η, Π, Ο), (Α, Η, Ο, Π),
(Η, Π, Ο, Α), Η, Π, Α, Ο), (Η, Ο, Π, Α),
(Η, Ο, Α, Π), (Η, Α, Π, Ο), (Η, Α, Ο, Π).

Επομένως $(4)_4 = 24$.

Η συστηματική καταγραφή των στοιχείων που μας ενδιαφέρουν διευκολύνεται σημαντικά από την χρήση δενδροδιαγράμματος.


Πρωταθλητής
Δεύτερος
Τρίτος
Τέταρτος

Πρόταση

Ο αριθμός $(\nu)_k$ των διατάξεων των ν στοιχείων ανά k δίνεται από τον τύπο:

$$(\nu)_k = \nu\,(\nu - 1) \cdots (\nu - k + 1), \quad 1 \leq k \leq \nu.$$

Στην ειδική περίπτωση k = ν, οπότε η διάταξη μετατρέπεται σε **μετάθεση** των ν στοιχείων, βρίσκουμε

$$(\nu)_\nu = \nu(\nu - 1) \ldots (\nu - \nu + 1) = \nu\,(\nu - 1) \ldots 1.$$

Η τελευταία παράσταση, η οποία περιλαμβάνει το γινόμενο των ν πρώτων φυσικών αριθμών συμβολίζεται με ν! και διαβάζεται «**ν παραγοντικό**», δηλαδή

$$\nu! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \nu.$$

Απόδειξη

Η διάταξη (α_1, α_2, ..., α_k) μπορεί να δημιουργηθεί σε k βήματα (φάσεις). Στο πρώτο βήμα διαλέγουμε ένα στοιχείο από το σύνολο X και το τοποθετούμε στην 1η θέση της διάταξης (επιλογή του α_1). Στη συνέχεια, από τα στοιχεία που απέμειναν στο X (ν - 1 το πλήθος) διαλέγουμε ένα δεύτερο και το τοποθετούμε στη δεύτερη θέση (επιλογή του α_2). Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο τη διαδικασία συμπλήρωσης των υπόλοιπων θέσεων μέχρι να φτάσουμε στο k βήμα όπου η επιλογή θα γίνει ανάμεσα στα ν - k +1 στοιχεία που απέμειναν στο σύνολο X. Έτσι συμπληρώνεται και η τελευταία θέση της διάταξης (επιλογή του α_k).

Με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή με

$$\nu_1 = \nu, \quad \nu_2 = \nu - 1, \quad \nu_3 = \nu - 2, \ldots, \nu_k = \nu - k + 1$$

συμπεραίνουμε ότι, το συνολικό πλήθος επιλογών για την διατεταγμένη k-άδα (α_1, α_2, ..., α_k) θα είναι ίσο με

$$\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_k = \underbrace{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-k+1)}_{k \text{ όροι}}.$$

Το παραγοντικό

$$1! = 1$$
$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$
$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$
$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$
$$\ldots$$
$$10! = 1 \cdot 2 \cdot \cdot \cdot 9 \cdot 10 = 3.628.800 \text{ κ.λπ.}$$

Καθώς το ν μεγαλώνει, το ν! αυξάνεται πολύ γρήγορα. Για παράδειγμα το 20! είναι ένας ακέραιος με 19 ψηφία ενώ το 50! ξεπερνάει το όριο της μνήμης που χρησιμοποιούν οι περισσότεροι υπολογιστές χειρός.

Ορισμένοι μάλιστα ισχυρίζονται ότι η χρήση του συμβόλου «!» έγινε ώστε να δηλώνει το θαυμασμό (έκπληξη) για τη ραγδαία αύξηση των τιμών του ν!

$(v)_k = v\,(v-1)\ldots(v-k+1)$,   1£ k £ v

Πόρισμα

α. Ο αριθμός των μεταθέσεων των v στοιχείων δίνεται από τον τύπο:

$$v! = 1 \cdot 2 \cdots v$$

β. Ο αριθμός των διατάξεων των v στοιχείων ανά k δίνεται από τον τύπο:

$$(v)_k = \frac{v!}{(v-k)!}, \quad 1 \leq k \leq v$$

Απόδειξη

$$(\nu)_k \cdot (\nu - k)! = [\nu (\nu - 1) \ldots (\nu - k + 1)] (\nu - k) (\nu - k - 1) \ldots 2 \cdot 1]$$

$$= \nu(\nu\text{-}1)\ldots 2 \cdot 1 = \nu!$$

οπότε

$$(\nu)_k \cdot (\nu - k)! = \nu! \Leftrightarrow (\nu)_k = \frac{\nu!}{(\nu - k)!}.$$

Το σύμβολο ν! επεκτείνεται και για ν = 0 θέτοντας συμβατικά 0! = 1.
Επίσης, το σύμβολο $(\nu)_k$ επεκτείνεται για k = 0 θέτοντας $(\nu)_0 = 1$.

Παράδειγμα 2.1.2

Μια ασφαλιστική εταιρεία διαθέτει 3 διαφορετικά ταμεία T_1, T_2, T_3. Αν στα ταμεία αυτά μπορούν να εργαστούν 8 διαφορετικοί υπάλληλοι της εταιρείας, με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να συμπληρωθούν τα 3 ταμεία; Ποια θα ήταν η απάντηση αν η εταιρεία διέθετε 8 ταμεία;

Απάντηση

Έστω $X = \{1, 2, ..., 8\}$ το σύνολο των ατόμων που μπορούν να απασχοληθούν στα $k = 3$ ταμεία. Κάθε τοποθέτηση ατόμων στα τρία ταμεία αντιστοιχεί στη συμπλήρωση μιας τριάδας $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ αποτελούμενης από στοιχεία του X, δηλαδή $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in X$. Το στοιχείο α_1 δηλώνει το άτομο που τοποθετήθηκε στο ταμείο T_1, το α_2 δηλώνει το άτομο που τοποθετήθηκε στο ταμείο T_2 και τέλος τα α_3 δηλώνει το άτομο που τοποθετήθηκε στο ταμείο T_3. Για παράδειγμα, η τριάδα (3, 7, 1) δηλώνει την τοποθέτηση

Ταμείο 1	**Ταμείο 2**	**Ταμείο 3**
3	7	1

ενώ η τριάδα (1, 3, 7) την τοποθέτηση

Ταμείο 1	**Ταμείο 2**	**Ταμείο 3**
1	3	7

Απάντηση

Είναι φανερό ότι **μας ενδιαφέρει η σειρά καταγραφής** των α_1, α_2, α_3 (δηλαδή έχουμε διατεταγμένη τριάδα) ενώ επιπλέον τα α_1, α_2, α_3 είναι ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους (κανένα άτομο δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί περισσότερο από μια φορά).
Άρα οι σχηματισμοί που ψάχνουμε είναι **διατάξεις** των $\nu = 8$ στοιχείων ανά $k = 3$ και το πλήθος τους θα δίνεται από τον τύπο

$$(8)_3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

Στην περίπτωση που τα ταμεία ήταν 8, προκύπτουν οι **μεταθέσεις** των $\nu = 8$ στοιχείων οπότε το πλήθος των διαφορετικών αποτελεσμάτων γίνεται

$$8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 8 = 40.320.$$

Παράδειγμα 2.1.3

Τέσσερα παντρεμένα ζευγάρια έχουν αγοράσει οκτώ εισιτήρια θεάτρου που αντιστοιχούν σε οκτώ συνεχόμενες θέσεις της ίδιας σειράς. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν τα οκτώ άτομα στις θέσεις έτσι ώστε:

α. να μην υπάρχει κανένας περιορισμός για τη θέση που καταλαμβάνει το κάθε άτομο;

β. άντρες και γυναίκες να κάθονται εναλλάξ;

γ. όλοι οι άνδρες να κάθονται σε 4 διαδοχικές θέσεις και όλες οι γυναίκες να κάθονται σε διαδοχικές θέσεις;

δ. όλες οι γυναίκες να κάθονται σε διαδοχικές θέσεις;

Απάντηση

κανένας περιορισμός για τη θέση που καταλαμβάνει το κάθε άτομο

Έστω X = {1, 2, ..., 8} το σύνολο των ατόμων που μπορούν να απασχοληθούν στα k = 3 ταμεία. Έστω

$$X_1 = \{A_1, A_2, A_3,. A_4\}$$

το σύνολο των 4 ανδρών και

$$X_2 = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4\}$$

το σύνολο των 4 γυναικών. Υποθέτουμε ότι τα 4 ζευγάρια είναι τα

$$(A_i, \Gamma_i),\ i = 1, 2, 3, 4.$$

α. Κάθε τοποθέτηση των 8 ατόμων στις 8 θέσεις αντιστοιχεί σε μια μετάθεση των ν = 8 στοιχείων του συνόλου $X_1 = X_1 \cup X_2$. Επομένως υπάρχουν 8! = 40.320 διαφορετικοί τρόποι κατάληψης των 8 θέσεων.

Απάντηση (β)

Άντρες και γυναίκες να κάθονται εναλλάξ

Οι τοποθετήσεις που μας ενδιαφέρουν μπορούν να διαμεριστούν σε δύο ξένες μεταξύ τους ομάδες: αυτές που έχουν τη μορφή ΑΓΑΓΑΓΑΓ και εκείνες που είναι της μορφής ΓΑΓΑΓΑΓΑ. Και στις δύο περιπτώσεις υπάρχουν:

- 4! τρόποι τοποθέτησης των ανδρών στις συγκεκριμένες θέσεις (μεταθέσεις των 4 στοιχείων του συνόλου $X_1 = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$),
- 4! τρόποι τοποθέτησης των γυναικών στις συγκεκριμένες θέσεις (μεταθέσεις των 4 στοιχείων του συνόλου $X_2 = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4\}$).

Σύμφωνα με την αρχή του γινομένου η κάθε μία από τις δύο ομάδες έχει 4! · 4! στοιχεία και με βάση την αρχή του αθροίσματος θα υπάρχουν:

$$4! \cdot 4! + 4! \cdot 4! = 2 \cdot 4! \cdot 4! = 2 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)^2 = 1.152$$

διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησης των 8 ατόμων ώστε άνδρες και γυναίκες να κάθονται εναλλάξ.

Απάντηση (γ)

Όλοι οι άνδρες να κάθονται σε διαδοχικές θέσεις και όλες οι γυναίκες να κάθονται σε διαδοχικές θέσεις

Οι δυνατές τοποθετήσεις θα είναι της μορφής

ΑΑΑΑΓΓΓΓ

ή

ΓΓΓΓΑΑΑΑ.

Εργαζόμενοι όπως στην περίπτωση (β) βρίσκουμε ότι το ζητούμενο πλήθος είναι και πάλι:

$$2 \cdot 4! \cdot 4! = 1.152$$

Απάντηση (δ)

Όλες οι γυναίκες να κάθονται σε διαδοχικές θέσεις

Αν θεωρήσουμε τις **4 γυναίκες ως μια ομάδα ατόμων έστω Γ***, η διαδικασία σχηματισμού των αποτελεσμάτων μπορεί να γίνει σε δύο φάσεις: στην **πρώτη φάση** μεταθέτουμε τους 4 άντρες A_1, A_2, A_3, A_4 και την ομάδα Γ* των γυναικών οπότε προκύπτει η θέση που θα καθίσει ο κάθε άνδρας και η τετράδα θέσεων που θα χρησιμοποιηθεί για τις τέσσερις γυναίκες (αυτό μπορεί να γίνει κατά 5! διαφορετικούς τρόπους). Έτσι για παράδειγμα, η μετάθεση

$$(A_2, Γ^*, A_1, A_4, A_3)$$

δηλώνει ότι οι τέσσερις γυναίκες θα καθίσουν ανάμεσα στον A_2 και A_1, ενώ η μετάθεση

$$(A_3, A_2, A_4, A_1, Γ^*)$$

ότι οι γυναίκες θα καθίσουν στο τέλος της σειράς, μετά τον A_1.

Αφού καθοριστεί στην πρώτη φάση, η θέση της τετράδας των καθισμάτων που θα καταληφθούν από γυναίκες, με τη **δεύτερη φάση** μεταθέτουμε τις γυναίκες και τις τοποθετούμε στα 4 συγκεκριμένα κενά καθίσματα (αυτό μπορεί να γίνει με 4! διαφορετικούς τρόπους).

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, το ζητούμενο πλήθος διαφορετικών τοποθετήσεων θα είναι ίσο με:

$$5! \cdot 4! = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) = 2.880$$

Ασκήσεις (σελίδα 59)

1. Στις εκλογές για την ανάδειξη του Διοικητικού Συμβουλίου (Δ.Σ.) ενός συλλόγου έχουν θέσει υποψηφιότητα 8 άτομα. Πόσα διαφορετικά Δ.Σ. μπορούν να σχηματιστούν αν αυτό είναι τριμελές και αποτελείται από τον πρόεδρο, τον γενικό γραμματέα και έναν ταμία;

2. Πέντε άτομα γράφουν σε ένα κατάλογο το μήνα γέννησής τους. Πόσοι διαφορετικοί κατάλογοι μπορούν να προκύψουν αν είναι γνωστό ότι κανένα άτομο δεν έχει γεννηθεί τον ίδιο μήνα με κάποιο άλλο;

3. Σε ένα δοχείο υπάρχουν 10 σφαιρίδια αριθμημένα από το 0 έως το 9. Εξάγουμε 4 σφαιρίδια το ένα μετά το άλλο και καταγράφουμε τον τετραψήφιο αριθμό που προκύπτει. Πόσοι διαφορετικοί αριθμοί μπορούν να σχηματιστούν;

Ασκήσεις

4. Ρίχνουμε ένα ζάρι ν ≤ 6 φορές. Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα μπορούν να εμφανιστούν τέτοια ώστε στις ν ρίψεις να μην υπάρχουν καθόλου ίδιες ενδείξεις; (υποτίθεται ότι μας ενδιαφέρει η σειρά εμφάνισης των αποτελεσμάτων).

5. Ένα λεωφορείο ξεκινάει από την αφετηρία με k άτομα. Μέχρι να φτάσει στο τέλος της διαδρομής του κάνει ν στάσεις (συμπεριλαμβανομένου του τέρματος) όπου k ≤ ν. Να υπολογιστεί ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούν να αποβιβαστούν τα k άτομα στις ν στάσεις έτσι ώστε σε κάθε στάση να αποβιβάζεται το πολύ ένα άτομο.

6. Πόσες λέξεις πέντε γραμμάτων μπορούν να σχηματιστούν τέτοιες ώστε το πρώτο, τρίτο και πέμπτο γράμμα να είναι φωνήεν, το δεύτερο και το τέταρτο να είναι σύμφωνα και να μην περιέχουν καθόλου ίδια γράμματα; Πόσος θα είναι ο αριθμός των λέξεων αυτών αν αντιστραφούν οι ρόλοι των φωνηέντων και των συμφώνων;

Ασκήσεις

7. Σε ένα πάρτι συμμετέχουν 8 κορίτσια και 4 αγόρια. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να σχηματίσουν μια σειρά χορού (όχι κυκλική) έτσι ώστε

α. όλα τα αγόρια να βρίσκονται σε διαδοχικές θέσεις;

β. οι δύο ακραίες θέσεις να καταλαμβάνονται από κορίτσια και κανένα αγόρι να μη βρίσκεται δίπλα σε άλλο αγόρι;

8. Να υπολογιστεί το πλήθος των άρτιων αριθμών που βρίσκονται μεταξύ του αριθμού 10.000 και του 79.999 και δεν περιέχουν καθόλου ίδια ψηφία.

9. Σε ένα ράφι βιβλιοθήκης πρόκειται να τοποθετηθούν ν διαφορετικά βιβλία μαθηματικών και k διαφορετικά βιβλία φυσικής.

α. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση των βιβλίων στα ράφια;

β. Αν $k \leq \nu + 1$ και κανένα βιβλίο φυσικής δεν επιτρέπεται να τοποθετηθεί δίπλα σε άλλο βιβλίο φυσικής, πόσοι διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησης υπάρχουν;

10. Σε ένα ράφι βιβλιοθήκης πρόκειται να τοποθετηθούν k εγκυκλοπαίδειες αποτελούμενες από r_1, r_2, ... r_k τόμους η κάθε μία και ν σειρές εκμάθησης ξένων γλωσσών αποτελούμενες από s_1, s_2, ..., $s_ν$ τόμους. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση

α. αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός;

β. αν οι τόμοι του ίδιου έργου δεν επιτρέπεται να χωρίζονται από τόμους άλλων έργων;

11. Αν ν, k είναι θετικοί ακέραιοι με $1 \leq k \leq ν$ να διαπιστώσετε ότι ισχύουν οι επόμενες σχέσεις.

α. $(ν + 1)! = (ν + 1) \cdot ν!$

β. $(ν)_1 = ν$

γ. $(ν)_{ν-1} = ν!$

δ. $(ν)_k = ν \cdot (ν - 1)_{k-1}, \quad k \geq 2$

ε. $(ν)_k = (ν - k + 1) \cdot (ν)_{k-1}, \quad 2 \leq k \leq ν + 1$

στ. $(ν)_k = (ν)_r \cdot (ν - r)_{k-r}, \quad 1 \leq r \leq k$

ζ. $(ν)_k = \dfrac{ν}{ν - k}(ν - 1)_k, \quad 1 \leq k \leq ν - 1.$

Ασκήσεις

12. Αν ν, k είναι θετικοί ακέραιοι με $1 \le k \le \nu$ να δειχτεί ότι:

α. $(\nu+1)_k = (\nu)_k + k\,(\nu)_{k-1}$

β. $(\nu+1)_k = k! + k\,((\nu)_{k-1} + (\nu-1)_{k-1} + \ldots + (k)_{k-1})$

13. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να διατάξουμε (μεταθέσουμε) τα 24 γράμματα της Ελληνικής αλφαβήτου έτσι ώστε τα γράμματα Α και Β να εμφανίζονται με αυτή τη σειρά (πρώτα το Α και μετά το Β) και να περιέχουν μεταξύ τους 3 άλλα γράμματα;

14. Να βρεθεί ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούν να τοποθετηθούν σε μια σειρά k αγόρια και ν κορίτσια έτσι ώστε

α. να μην υπάρχει κανένας περιορισμός

β. όλα τα κορίτσια να είναι τοποθετημένα σε διαδοχικές θέσεις

γ. κανένα αγόρι να μη βρίσκεται δίπλα σε άλλο αγόρι ($k \le \nu+1$)

δ. τουλάχιστον ένα αγόρι να βρίσκεται δίπλα σε άλλο αγόρι ($k \le \nu+1$).