ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Σ υ ν δ υ α σ τ ι κ ή

Πειραιάς 2007

Μάθημα 2ο

Κανόνες Απαρίθμησης

(συνέχεια)

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΕ ΔΙΑΦΑΝΕΙΕΣ, ΒΙΒΛΙΟ & ΔΕΙΓΜΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

www.unipi.gr/faculty/mkoutras/index.htm

1.4 ΑΛΛΟΙ ΚΑΝΟΝΕΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

Σε πολλές περιπτώσεις, τα σύνολα που θέλουμε να απαριθμήσουμε εκφράζονται μέσω άλλων συνόλων με χρήση των βασικών πράξεων της ένωσης, της τομής και του συμπληρώματος.

Πρόταση

Αν Α, Β είναι (πεπερασμένα) υποσύνολα ενός πεπερασμένου βασικού συνόλου Ω, τότε:

α. $|A'| = |\Omega| - |A|$

β. $|A \cap B'| = |A| - |A \cap B|$

γ. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

α. $|A'| = |\Omega| - |A|$

Απόδειξη

Αν A_1, A_2 είναι δυο ξένα μεταξύ τους σύνολα, θα ισχύει:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$$

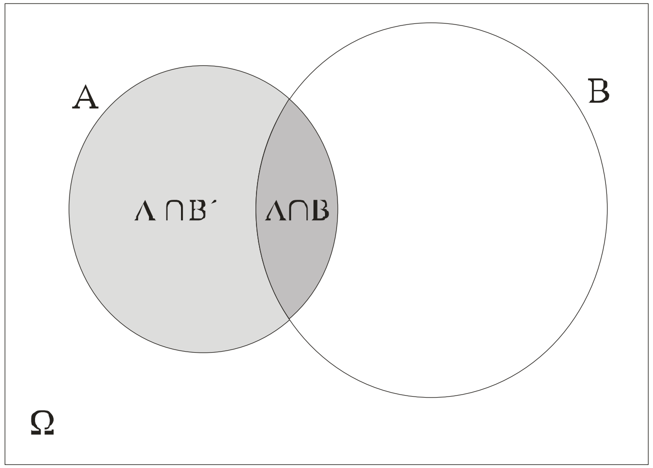
α. Για $A_1 = A$ και $A_2 = A'$ βρίσκουμε ότι:

$$|A \cup A'| = |A| + |A'|.$$

Όμως $A \cup A' = \Omega$ οπότε τελικά θα έχουμε

$$|\Omega| = |A| + |A'| \Leftrightarrow |A'| = |\Omega| - |A|$$

$$\beta. \quad |A \cap B'| = |A| - |A \cap B|$$



Απόδειξη

β. Αν $A_1 = A \cap B,\ A_2 = A \cap B'$ θα έχουμε

$$A_1 \cap A_2 = (A \cap B) \cap (A \cap B') = A \cap (B \cap B') = A \cap \varnothing = \varnothing$$

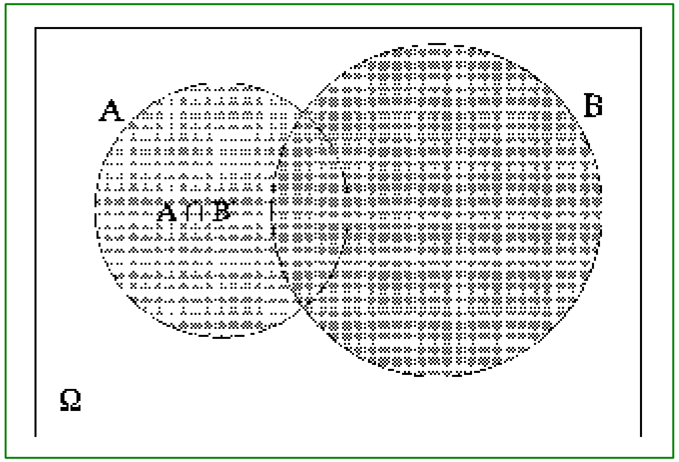
οπότε και πάλι θα ισχύει:

$$|(A \cap B) \cup (A \cap B')| = |A \cap B| + |A \cap B'|.$$

Η απόδειξη συμπληρώνεται αν παρατηρήσουμε ότι

$$(A \cap B) \cup (A \cap B') = A.$$

$\gamma. \quad |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$



Απόδειξη

γ. Η ένωση $A \cup B$ των συνόλων Α, Β μπορεί να γραφεί ως ένωση δύο ξένων συνόλων A_1, A_2 ως εξής:

$$A \cup B = (A \cap B') \cup B = A_1 \cup A_2.$$

Επομένως

$$|A \cup B| = |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| = |A \cap B'| + |B|$$

και κάνοντας χρήση του (β) μπορούμε να γράψουμε:

$$|A \cup B| = (|A| - |A \cap B|) + |B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

$\alpha.\quad |A'| = |\Omega| - |A|$

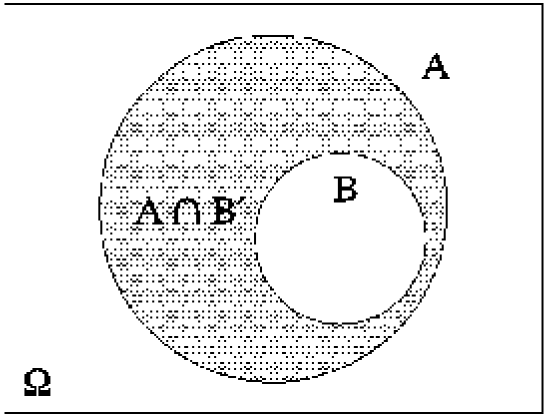
$\beta.\quad |A \cap B'| = |A| - |A \cap B|$

$\gamma.\quad |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Ειδικές περιπτώσεις

α. $B \subseteq A \Rightarrow |A \cap B'| = |A| - |B|$

(αφού τότε ισχύει $A \cap B = B$)



β. $A \cap B = \varnothing \Rightarrow |A \cap B| = 0 \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$

Παράδειγμα 1.4.1

Στο Παράδειγμα που αναφέρεται στους αριθμούς κυκλοφορίας των αυτοκινήτων, πόσοι διαφορετικοί αριθμοί κυκλοφορίας υπάρχουν οι οποίοι έχουν τουλάχιστον δύο ίδια γράμματα στο πρώτο τους τμήμα (π.χ. ΑΒΒ 1357, ΕΖΕ 4152 κλπ);

Απάντηση

Αν συμβολίσουμε με

Ω : το σύνολο όλων των δυνατών αριθμών (βασικό σύνολο)

Α : σύνολο των αριθμών στους οποίους **και τα τρία γράμματα είναι διαφορετικά** μεταξύ τους,

($A \subseteq \Omega$,) το πλήθος που ζητάμε είναι ο πληθικός αριθμός του συνόλου Α΄. Επομένως,

$$|A'| = |\Omega| - |A| = 24.696.000 - 19.656.000 = 5.040.000$$

Παράδειγμα 1.4.2

Από τους 200 φοιτητές που συμμετείχαν στις εξετάσεις των μαθημάτων «Συνδυαστική» και «Περιγραφική Στατιστική», 120 πέρασαν το μάθημα της Συνδυαστικής, 110 πέρασαν το μάθημα της Περιγραφικής Στατιστικής ενώ 50 φοιτητές πέρασαν και στα δυο μαθήματα. Πόσοι φοιτητές

α. πέρασαν το μάθημα της Συνδυαστικής χωρίς να περάσουν συγχρόνως και το μάθημα της Περιγραφικής Στατιστικής;
β. πέρασαν το μάθημα της Περιγραφικής Στατιστικής χωρίς να περάσουν συγχρόνως και το μάθημα της Συνδυαστικής;
γ. πέρασαν **τουλάχιστον** σε ένα από τα δύο μαθήματα;
δ. δεν πέρασαν σε **κανένα** από τα δύο μαθήματα;

Απάντηση

Ας συμβολίσουμε

Ω : το σύνολο των φοιτητών που προσήλθαν στις εξετάσεις,

Α : το σύνολο των φοιτητών που πέρασαν το μάθημα της Συνδυαστικής

Β : το σύνολο των φοιτητών που πέρασαν το μάθημα της Περιγραφικής Στατιστικής.

Τότε θα έχουμε

$$|\Omega| = 200, \; |A| = 120, \; |B| = 110, \; |A \cap B| = 50$$

$$|\Omega| = 200,\ |A| = 120,\ |B| = 110,\ |A \cap B| = 50$$

α. $|A \cap B'| = |A| - |A \cap B| = 120 - 50 = 70$

β. $|A' \cap B| = |B| - |A \cap B| = 110 - 50 = 60$

γ. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 120 + 110 - 50 = 180$

δ. $\left|(A \cup B)'\right| = |\Omega| - |A \cup B| = 200 - 180 = 20.$

α. $|A'| = |\Omega| - |A|$

β. $|A \cap B'| = |A| - |A \cap B|$

γ. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Ασκήσεις (σελίδα 36)

1. Αν Α, Β είναι υποσύνολα ενός πεπερασμένου βασικού συνόλου Ω να δειχτεί ότι

α. $|A'\cap B'| = |\Omega| - |A| - |B| + |A\cap B|$

β. $|A'\cup B'| = |\Omega| - |A\cap B|$

γ. $|A'\cup B| = |\Omega| - |A| + |A\cap B|$

2. Αν Α, Β, Γ είναι υποσύνολα ενός πεπερασμένου βασικού συνόλου Ω να δειχτεί ότι

$$|A\cup B\cup \Gamma| = |A| + |B| + |\Gamma| - |A\cap B| - |B\cap \Gamma| - |\Gamma\cap A| +$$

$$+|A\cap B\cap \Gamma|.$$

3. Αν Α, Β είναι υποσύνολα ενός πεπερασμένου βασικού συνόλου Ω να δειχτεί ότι οι παραστάσεις

α. $|A'|\cdot|B| - |\Omega|\cdot|A'\cap B|$ **β.** $|A|\cdot|B'| - |\Omega|\cdot|A\cap B'|$

γ. $|A'\cap B'|\cdot|\Omega| - |A'|\cdot|B'|$ **δ.** $|A\cap B|\cdot|\Omega| - |A|\cdot|B|$

είναι ίσες μεταξύ τους.

4. Ένας παίκτης του Scramble χωρίζει τα 24 γράμματα σε τρεις ομάδες. Η πρώτη περιλαμβάνει τα 10 πρώτα γράμματα του αλφαβήτου (Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι., Κ), η δεύτερη τα 8 επόμενα (Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ, Σ) ενώ η τρίτη τα 6 τελευταία (Τ, Υ, Φ,Χ, Υ, Ω).

α. Πόσες λέξεις τριών γραμμάτων μπορούν να σχηματιστούν χρησιμοποιώντας στην πρώτη θέση ένα γράμμα από την πρώτη ομάδα, στη δεύτερη ένα από τη δεύτερη και στην τρίτη ένα από την τρίτη;

β. Πόσες από τις λέξεις αυτές περιέχουν τουλάχιστον ένα φωνήεν;

γ. Πόσες από τις λέξεις αυτές περιέχουν τουλάχιστον ένα σύμφωνο;

δ. Πόσες από τις λέξεις αυτές περιέχουν μόνο φωνήεντα ή μόνο σύμφωνα;

5. Σε μια δειγματοληπτική έρευνα μεταξύ των φοιτητών για την εξέταση των συνηθειών τους ως προς το ποτό και το κάπνισμα συγκεντρώθηκαν τα εξής στοιχεία: 500 φοιτητές δήλωσαν ότι πίνουν ποτά αλλά δεν καπνίζουν, 400 φοιτητές δήλωσαν ότι καπνίζουν αλλά δεν πίνουν ποτά ενώ οι 100 δήλωσαν ότι καπνίζουν και πίνουν. Πόσοι από τους φοιτητές που ρωτήθηκαν, είχαν τουλάχιστον τη μία από τις δυο «κακές» συνήθειες (να καπνίζουν ή να πίνουν);

1.5 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΣΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥΣ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ

Ο όρος **πιθανότητα** είναι άμεσα συνυφασμένος με τη μελέτη φαινομένων όπου υπάρχει τυχαιότητα ή αβεβαιότητα. Κάθε φαινόμενο όπου μπορούν να εμφανισθούν πολλά διαφορετικά αποτελέσματα χωρίς να υπάρχει τρόπος να καθορισθεί ποιο αποτέλεσμα θα εμφανισθεί κάθε φορά, αποτελεί αντικείμενο μελέτης της θεωρίας πιθανοτήτων.

Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης λέγεται δειγματικός χώρος και συμβολίζεται συνήθως με Ω.

Παρότι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης μπορεί να είναι είτε πεπερασμένος είτε άπειρος, εδώ θα περιοριστούμε μόνο στην πρώτη περίπτωση δηλαδή θα υποθέτουμε ότι το Ω αποτελείται από πεπερασμένο το πλήθος στοιχεία.

Παράδειγμα 1.5.1

α. Μελετώντας το «πείραμα» της γέννησης ενός παιδιού έχουμε δύο δυνατά εξαγόμενα: Αγόρι (Α) ή κορίτσι (Κ). Επομένως ο δειγματικός χώρος είναι ο

$$\Omega = \{ \text{Α}, \text{Κ} \}.$$

β. Κατά τη ρίψη ενός νομίσματος 3 φορές τα δυνατά αποτελέσματα είναι τριάδες από κεφαλές (Κ) και γράμματα (Γ). Συνεπώς

$$\Omega = \{ \text{ΚΚΚ}, \text{ΚΚΓ}, \text{ΚΓΚ}, \text{ΚΓΓ}, \text{ΓΚΚ}, \text{ΓΚΓ}, \text{ΓΓΚ}, \text{ΓΓΓ} \}.$$

Παράδειγμα 1.5.1

γ. Ένα λευκό και ένα μαύρο ζάρι ρίχνονται συγχρόνως. Το τυπικό αποτέλεσμα του πειράματος είναι ένα ζεύγος (i,j) με $1 \le i, j \le 6$ όπου με i συμβολίσαμε την ένδειξη του λευκού ζαριού και με j την ένδειξη του μαύρου. Άρα ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από 36 ζεύγη, πιο συγκεκριμένα

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),\ldots,(2,6),\ldots,(6,1),\ldots,(6,6)\}.$$

Κάθε υποσύνολο Α του δειγματικού χώρου Ω λέγεται **ενδεχόμενο ή γεγονός**.

Κατά την εκτέλεση ενός πειράματος θα λέμε ότι συνέβη το ενδεχόμενο Α αν το αποτέλεσμα του πειράματος ήταν κάποιο στοιχείο του Α. Στην αντίθετη περίπτωση θα λέμε ότι δεν συνέβη το ενδεχόμενο Α ή καλύτερα ότι συνέβη το ενδεχόμενο Α΄.

Κλασσικός ορισμός της πιθανότητας (κατά Laplace, 1812)

Αν ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος είναι **πεπερασμένος** και όλα τα απλά (στοιχειώδη) ενδεχόμενά του είναι **ισοπίθανα**, τότε η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α δίνεται από τον τύπο

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{πλήθος των στοιχείων του } A}{\text{πλήθος των στοιχείων του } \Omega}$$

Τα στοιχεία του συνόλου (ενδεχομένου) Α ονομάζονται συνήθως **«ευνοϊκές περιπτώσεις»** ή **«ευνοϊκά αποτελέσματα»**, ενώ τα στοιχεία του βασικού συνόλου (δειγματικού χώρου) Ω **«δυνατές περιπτώσεις»** ή **«δυνατά αποτελέσματα»**.

Παράδειγμα 1.5.1

Κατά τη ρίψη ενός νομίσματος 3 φορές ο δειγματικός χώρος είναι ο

$$\Omega = \{ \text{ΚΚΚ}, \text{ΚΚΓ}, \text{ΚΓΚ}, \text{ΚΓΓ}, \text{ΓΚΚ}, \text{ΓΚΓ}, \text{ΓΓΚ}, \text{ΓΓΓ} \}.$$

και έχει $N = |\Omega| = 8$ στοιχεία. Τα ενδεχόμενα

A_i: εμφανίζονται i κεφαλές (Κ), $i=0,1,2,3$

δίδονται από τα σύνολα

$A_0 = \{\text{ΓΓΓ}\}$ (απλό ενδεχόμενο)
$A_1 = \{\text{ΚΓΓ}, \text{ΓΚΓ}, \text{ΓΓΚ}\}$ (σύνθετο ενδεχόμενο)
$A_2 = \{\text{ΚΚΓ}, \text{ΚΓΚ}, \text{ΓΚΚ}\}$ (σύνθετο ενδεχόμενο)
$A_3 = \{\text{ΚΚΚ}\}$ (απλό ενδεχόμενο).

Συνεπώς οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

A_i: εμφανίζονται ακριβώς i κορώνες $i = 0,1,2,3$

θα είναι:

$$P(A_0) = \frac{|A_0|}{N} = \frac{1}{8}, P(A_1) = \frac{|A_1|}{N} = \frac{3}{8}, P(A_2) = \frac{|A_2|}{N} = \frac{3}{8} P(A_4) = \frac{|A_4|}{N} = \frac{1}{8}$$

4. Ένας παίκτης του Scramble χωρίζει τα 24 γράμματα σε τρεις ομάδες. Η πρώτη περιλαμβάνει τα 10 πρώτα γράμματα του αλφαβήτου (Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι., Κ), η δεύτερη τα 8 επόμενα (Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ, Σ) ενώ η τρίτη τα 6 τελευταία (Τ, Υ, Φ,Χ, Υ, Ω).

α. Πόσες λέξεις τριών γραμμάτων μπορούν να σχηματιστούν χρησιμοποιώντας στην πρώτη θέση ένα γράμμα από την πρώτη ομάδα, στη δεύτερη ένα από τη δεύτερη και στην τρίτη ένα από την τρίτη;

β. ~~Πόσες από τις λέξεις αυτές περιέχουν τουλάχιστον ένα φωνήεν;~~
Ποια είναι η πιθανότητα μια λέξη να περιέχει τουλάχιστον ένα φωνήεν;

γ. ~~Πόσες από τις λέξεις αυτές περιέχουν τουλάχιστον ένα σύμφωνο;~~
Ποια είναι η πιθανότητα μια λέξη να περιέχει τουλάχιστον ένα σύμφωνο;

δ. ~~Πόσες από τις λέξεις αυτές περιέχουν μόνο φωνήεντα ή μόνο σύμφωνα;~~
Ποια είναι η πιθανότητα μια λέξη να περιέχει μόνο φωνήεντα ή μόνο σύμφωνα;

5. Σε μια δειγματοληπτική έρευνα μεταξύ των φοιτητών για την εξέταση των συνηθειών τους ως προς το ποτό και το κάπνισμα συγκεντρώθηκαν τα εξής στοιχεία: 500 φοιτητές δήλωσαν ότι πίνουν ποτά αλλά δεν καπνίζουν, 400 φοιτητές δήλωσαν ότι καπνίζουν αλλά δεν πίνουν ποτά ενώ οι 100 δήλωσαν ότι καπνίζουν και πίνουν. ~~Πόσοι από τους φοιτητές που ρωτήθηκαν, είχαν τουλάχιστον τη μία από τις δυο «κακές» συνήθειες (να καπνίζουν ή να πίνουν);~~ Αν διαλέξουμε ένα φοιτητή στην τύχη, ποια είναι η πιθανότητα να έχει τουλάχιστον τη μία από τις δυο «κακές» συνήθειες ;

Ασκήσεις (σελίδα 46)

1. Σε μία έκθεση αυτοκινήτων στην οποία εργάζονται δύο πωλητές α και β, έχουν απομείνει προς πώληση 3 αυτοκίνητα. Να γραφεί ο δειγματικός χώρος στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει ο αριθμός των αυτοκινήτων που θα πουληθούν σε μια δεδομένη χρονική περίοδο (π.χ. σε μια εβδομάδα)

α. συνολικά και από τους δύο πωλητές

β. από τον κάθε πωλητή.

2. Ρίχνουμε ένα νόμισμα 4 φορές και ορίζουμε τα ενδεχόμενα

A_i: εμφανίζονται i κεφαλές ($i = 0,1,2,3,4$)

α. Να γραφεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος

β. Να γραφούν αναλυτικά τα ενδεχόμενα A_0, A_1, A_2, A_3, A_4.

γ. Να γραφούν με χρήση πράξεων μεταξύ των ενδεχομένων A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 τα ενδεχόμενα

Β: εμφανίζεται τουλάχιστον μία κεφαλή και ένα γράμμα.

Γ: εμφανίζονται τέσσερα ίδια αποτελέσματα

Δ: δεν εμφανίζονται τέσσερα ίδια αποτελέσματα.

Ασκήσεις

3. Ένα άσπρο και ένα μαύρο ζάρι ρίχνονται συγχρόνως.

α. Να γραφεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος

β. Να γραφούν αναλυτικά τα ενδεχόμενα

Α: το άθροισμα των ενδείξεων είναι 4

Β: οι δύο ενδείξεις είναι ίδιες

Γ: μία από τις δύο ενδείξεις είναι άρτια και μια περιττή.

γ. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες εμφάνισης των ενδεχομένων

$$A,\ B,\ A \cap B,\ A \cup B.$$

4. Τρία άτομα α_1, α_2, α_3 παίρνουν ένα κομμάτι χαρτί και γράφουν ο καθένας έναν από τους αριθμούς 1, 2, 3. Δώστε το δειγματικό χώρο του πειράματος και στη συνέχεια γράψτε αναλυτικά τα ενδεχόμενα

Α: οι τρεις αριθμοί που διαλέχτηκαν είναι ίσοι

Β: τουλάχιστον δύο από τους αριθμούς που διαλέχτηκαν είναι διαφορετικοί.

Στη συνέχεια να υπολογιστούν οι πιθανότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων Α και Β.