ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Σ υ ν δ υ α σ τ ι κ ή

Πειραιάς 2007

Το κύριο αντικείμενο της Συνδυαστικής

- Οι τεχνικές υπολογισμού του πλήθους των στοιχείων πεπερασμένων συνόλων ή υποσυνόλων τους τα οποία έχουν συγκεκριμένες ιδιότητες, αναφέρονται συνήθως ως **μέθοδοι απαρίθμησης** και αποτελούν το κύριο αντικείμενο της **Συνδυαστικής** . Η συστηματική ανάπτυξη τέτοιων τεχνικών οι οποίες να μην απαιτούν την πλήρη καταγραφή των στοιχείων των υπό μελέτη συνόλων, είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στις περιπτώσεις κατά τις οποίες τα σύνολα αυτά έχουν μεγάλο πλήθος στοιχείων

Μάθημα 1ο

Βασικές αρχές απαρίθμησης

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

1.1 *Απαρίθμηση και καταγραφή*

1.2 *Η αρχή του αθροίσματος*

1.3 *Η πολλαπλασιαστική αρχή*

1.4 *Άλλοι κανόνες απαρίθμησης*

1.5 *Πιθανότητες σε πεπερασμένους δειγματικούς χώρους*

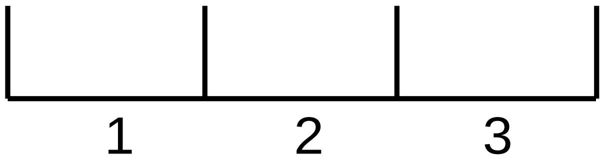
1.1 ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΓΡΑΦΗ

Όταν το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου το οποίο θέλουμε να απαριθμήσουμε είναι σχετικά μικρό, μπορούμε να προχωρήσουμε στη συστηματική καταγραφή των στοιχείων του και στη συνέχεια να μετρήσουμε το πλήθος τους.

Παράδειγμα 1.1.1

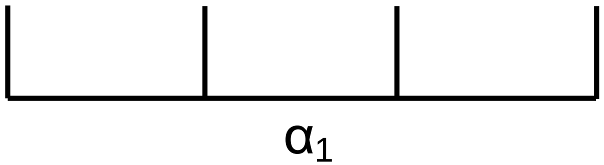
Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε $\nu = 3$ άτομα σε μια σειρά;

Ας συμβολίσουμε τα τρία άτομα με $α_1$, $α_2$, $α_3$ και τις τρεις θέσεις που θα καταλάβουν ως

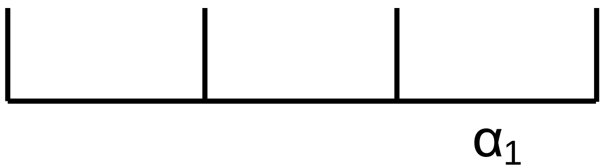


Το πρώτο άτομο μπορεί να καταλάβει είτε την πρώτη θέση, οπότε θα έχουμε

είτε τη δεύτερη, οπότε θα είναι



είτε την τρίτη, οπότε προκύπτει



Στην πρώτη περίπτωση, οι δυνατές τοποθετήσεις των υπολοίπων δύο ατόμων είναι οι εξής:

α_1	α_2	α_3	,	α_1	α_3	α_2

Όμοια, στη δεύτερη περίπτωση θα έχουμε

α_2	α_1	α_3	,	α_3	α_1	α_2

ενώ τέλος για την τρίτη

α_2	α_3	α_1	,	α_3	α_2	α_1

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε ν = 3 άτομα σε μια σειρά;

Παράδειγμα 1.1.1

$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$\alpha_1\alpha_3\alpha_2$	$\alpha_2\alpha_1\alpha_3$	$\alpha_3\alpha_1\alpha_2$	$\alpha_2\alpha_3\alpha_1$	$\alpha_3\alpha_2\alpha_1$

Αξίζει να σημειωθεί ότι στο συγκεκριμένο παράδειγμα το σύνολο που απαριθμήσαμε αποτελείται από διατεταγμένες τριάδες, δηλαδή χρησιμοποιώντας συμβολισμούς της **θεωρίας συνόλων**, θα μπορούσαμε να το γράψουμε στη μορφή

$$A = \{ (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), (\alpha_1,\alpha_3,\alpha_2), (\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3), (\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2), (\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1), (\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1)\}.$$

ν	3	4	5	6	10
Πλήθος	6	24	120	720	3628800

Παράδειγμα 1.1.2

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε σε μια σειρά δύο αγόρια και δύο κορίτσια έτσι ούτε τα δύο κορίτσια ούτε τα δύο αγόρια να κάθονται σε διαδοχικές θέσεις;

Ας συμβολίσουμε με $α_1$, $α_2$ τα δύο αγόρια και με $κ_1$, $κ_2$ τα δύο κορίτσια. Εφ' όσον τα δύο κορίτσια δεν μπορούν να καθίσουν σε διαδοχικές θέσεις, οι μόνες δυνατές επιλογές γι' αυτά είναι

ή

Στις δύο θέσεις που μένουν κενές μπορούν να τοποθετηθούν τα δύο αγόρια, είτε στη σειρά $α_1α_2$ είτε στη σειρά $α_2α_1$. Τελικά λοιπόν θα έχουμε τις επόμενες 8 περιπτώσεις:

$k_1α_1k_2α_2$	$k_1α_2k_2α_1$	$k_2α_1k_1α_2$	$k_2α_2k_1α_1$
$α_1k_1α_2k_2$	$α_2k_1α_1k_2$	$α_1k_2α_2k_1$	$α_2k_2α_1k_1$

Παράδειγμα 1.1.3 (Δενδροδιάγραμμα)

Ένας φοιτητής μπορεί να διαλέξει σε ένα συγκεκριμένο εξάμηνο μέχρι 3 μαθήματα επιλογής. Τα διαθέσιμα μαθήματα κατατάσσονται σε τρία διαφορετικά πεδία:

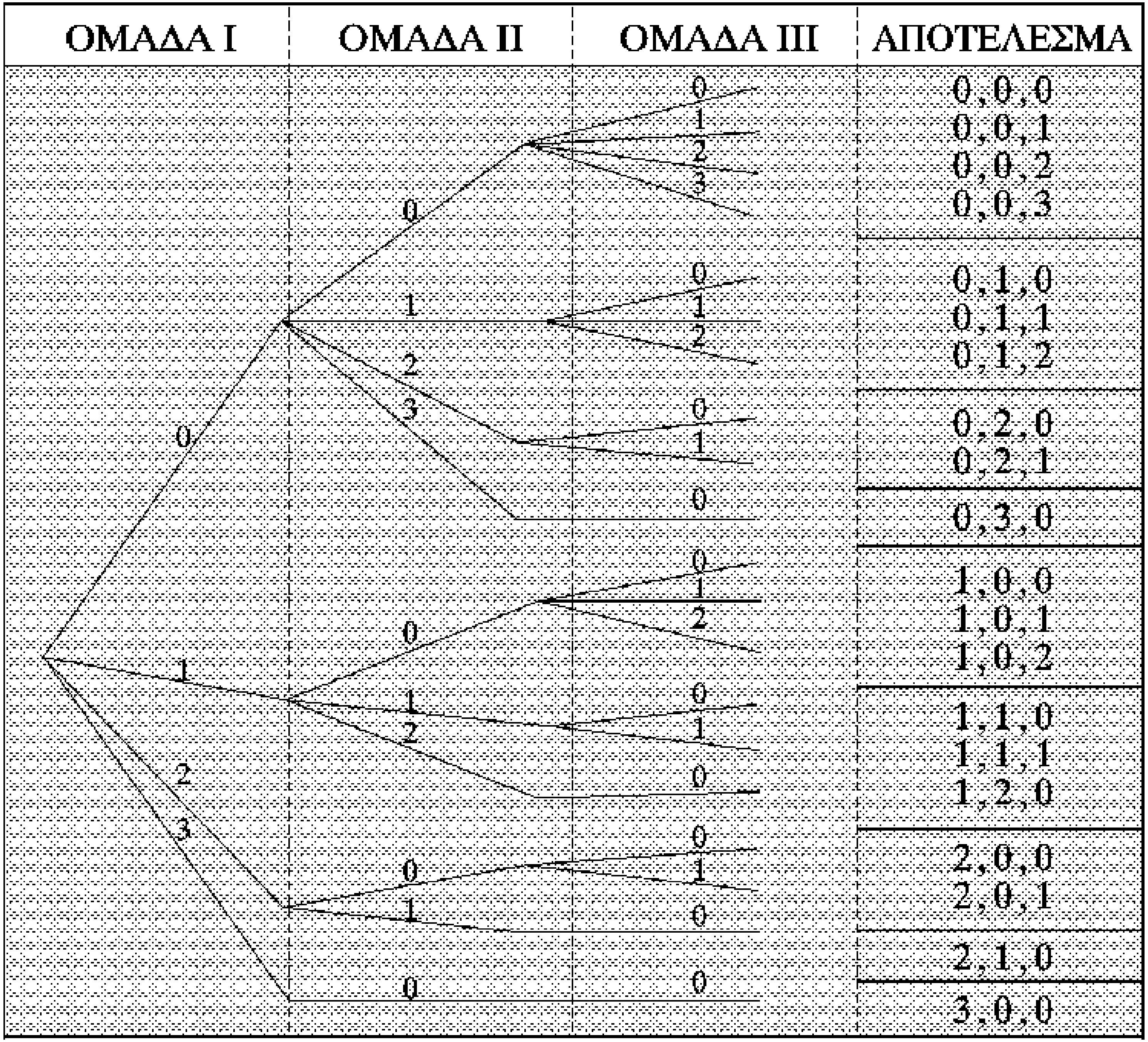
Στατιστική (ομάδα I),

Αναλογιστική επιστήμη (ομάδα II)

Οικονομικά (ομάδα III).

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί ο φοιτητής να επιλέξει τον αριθμό μαθημάτων σε κάθε πεδίο;

Αν ο φοιτητής δεν θέλει να διαλέξει **κανένα μάθημα** τότε προφανώς διαλέγει 0 μαθήματα από κάθε ομάδα. Αν αποφασίσει να διαλέξει **ένα μάθημα** τότε οι επιλογές ανά ομάδα θα είναι 1, 0, 0 ή 0, 1, 0 ή 0, 0, 1. Στην περίπτωση επιλογής **δύο μαθημάτων** υπάρχουν φυσικά πολλές διαφορετικές δυνατότητες (π.χ. 1, 1, 0 ή 0, 1, 1 ή 2, 0, 0 κλπ.), και πολύ περισσότερες όταν θελήσει να διαλέξει **τρία μαθήματα** (π.χ. 1, 1, 1 ή 2, 1, 0 ή 0, 3, 0 κτλ.). Αν προσπαθήσουμε να καταγράψουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις με την παραπάνω διαδικασία, είναι πολύ πιθανό κάποια αποτελέσματα να παραλειφθούν. Το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί πολύ πιο αποτελεσματικά αν δημιουργήσουμε το δενδροδιάγραμμα που ακολουθεί.


ΟΜΑΔΑ Ι
ΟΜΑΔΑ ΙΙ
ΟΜΑΔΑ ΙΙΙ
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
0,0,0
0,0,1
0,0,2
0,0,3
0,1,0
0,1,1
0,1,2
0,2,0
0,2,1
0,3,0
1,0,0
1,0,1
1,0,2
1,1,0
1,1,1
1,2,0
2,0,0
2,0,1
2,1,0
3,0,0

Ασκήσεις **(Σελίδα 19)**

1. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε σε μια σειρά τρία αγόρια και δύο κορίτσια έτσι ώστε κανένα από τα τρία αγόρια να μην κάθεται δίπλα σε άλλο αγόρι;

2. Μια λέξη μήκους 3 του κώδικα Morse αποτελείται από μια σειρά τριών χαρακτήρων καθένας από τους οποίους μπορεί να είναι τελεία (.) ή παύλα (—) π.χ. — ᵡ ᵡ ή — — ᵡ ή — — — κλπ. Πόσες διαφορετικές λέξεις μπορούν να σχηματιστούν;

3. Να υπολογιστεί, αφού πρώτα γίνει πλήρης καταγραφή, το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

α. $x^2 + y^2 = 4$

β. $x^2 + y^2 = 3$

(Υπόδειξη: (α) παρατηρήστε ότι θα πρέπει $x^2 = 0$ ή 1 ή 4 και βρείτε τις αντίστοιχες επιτρεπτές τιμές για το y).

Ασκήσεις

4. Χρησιμοποιώντας δενδρογράμματα, να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων του συνόλου

α. $A = \{(\alpha, \beta, \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, 3\}, \alpha \geq \beta \text{ και } \alpha \geq \gamma\}$

β. $B = \{(\alpha, \beta, \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \in \{0, 2, 3\} \text{ και } \alpha + \beta + \gamma \leq 5\}$

5. Σε μια ιατρική έρευνα οι ασθενείς έχουν ταξινομηθεί ανάλογα με την ομάδα αίματος (Α, Β, ΑΒ ή 0) καθώς επίσης και ανάλογα με το επίπεδο της πίεσής τους (χαμηλή, κανονική, υψηλή). Να βρεθεί το πλήθος των διαφορετικών ομάδων ταξινόμησης των ασθενών με χρήση δενδροδιαγράμματος.

1.2 Η ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

Αν το στοιχείο

- α_1 μπορεί να επιλεγεί με ν_1 διαφορετικούς τρόπους,
- το α_2 με ν_2 διαφορετικούς τρόπους,

……….

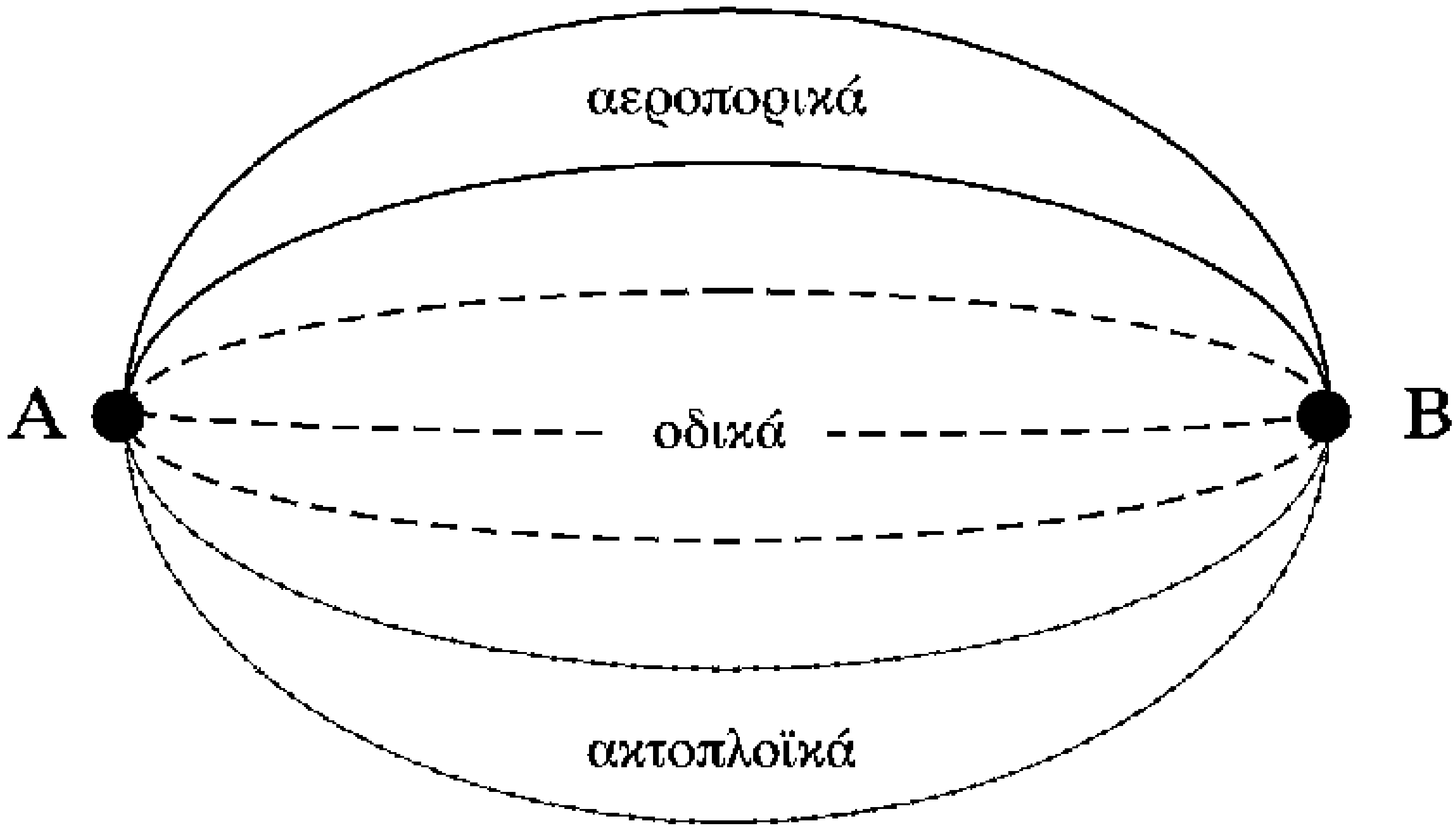
- το α_k με ν_k διαφορετικούς τρόπους

και η επιλογή του στοιχείου α_i αποκλείει την επιλογή του στοιχείου α_j με $j \neq i$, τότε η επιλογή του α_1 ή α_2 ή … ή α_k μπορεί να γίνει με $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_k$ διαφορετικούς τρόπους.

Η αρχή του αθροίσματος μπορεί να διατυπωθεί ανάλογα αν αντικατα-στήσουμε τη λέξη «στοιχείο» με τις λέξεις «αντικείμενο», «ενέργεια», «γεγονός» κλπ.

Παράδειγμα 1.2.1

Από μία πόλη Α εκτελούνται καθημερινά 2 αεροπορικά, 3 οδικά και 2 ακτοπλοϊκά δρομολόγια προς την πόλη Β. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να ταξιδέψει κάποιος από την πόλη Α στην πόλη Β μια συγκεκριμένη ημέρα;



Το ταξίδι από την πόλη A προς την πόλη B μπορεί να γίνει αεροπορικά (α_1), οδικά (α_2) ή ακτοπλοϊκά (α_3). Η επιλογή του α_1 μπορεί να γίνει με $v_1 = 2$ διαφορετικούς τρόπους, του α_2 με $v_2 = 3$ ενώ του α_3 με $v_3 = 3$ διαφορετικούς τρόπους. Επίσης, η επιλογή του α_i αποκλείει την επιλογή οποιουδήποτε α_j με $j \neq i$. Επομένως, σύμφωνα με την αρχή του αθροίσματος, θα υπάρχουν 2 + 3 + 2 = 7 τρόποι για να ταξιδέψει κανείς από την πόλη A προς την πόλη B.

ΠΡΟΣΟΧΗ !!

Κατά την εφαρμογή της αρχής του αθροίσματος θα πρέπει να δίνεται ιδιαίτερη προσοχή κατά πόσον ισχύει η συνθήκη

«η επιλογή του στοιχείου $α_i$ αποκλείει την επιλογή του στοιχείου $α_j$ με $j \neq i$».

Αν αυτή δεν έχει εξασφαλιστεί, η εφαρμογή της αρχής του αθροίσματος μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένα αποτελέσματα.

Παράδειγμα 1.2.2

Υπάρχουν 4 άρτιοι θετικοί ακέραιοι μικρότεροι του 10 (2, 4, 6, 8) και 5 πρώτοι θετικοί ακέραιοι μικρότεροι του 10 (1, 2, 3, 5, 7). Πόσοι θετικοί ακέραιοι μικρότεροι του 10 υπάρχουν οι οποίοι είναι άρτιοι ή πρώτοι;

Ας χρησιμοποιήσουμε το $α_1$ για να δηλώσουμε επιλογή άρτιου θετικού ακέραιου μικρότερου του 10 και το $α_2$ για να δηλώσουμε επιλογή πρώτου θετικού ακέραιου μικρότερου του 10. Σύμφωνα με την εκφώνηση, το $α_1$ μπορεί να επιλεγεί με 4 τρόπους ενώ το $α_2$ με 5.

Όμως η επιλογή θετικού ή πρώτου ακεραίου μικρότερου του 10 μπορεί να γίνει με 8 διαφορετικούς τρόπους (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) και όχι με 9 = 4 + 5 όπως θα προέκυπτε με εφαρμογή της αρχής του αθροίσματος.

Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η επιλογή του $α_1$ δεν αποκλείει την επιλογή του $α_2$ αφού ο αριθμός 2 είναι και πρώτος και άρτιος συγχρόνως.

1.2 Η ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

(με ορολογία θεωρίας συνόλων)

Έστω A_1 , A_2 , ..., A_k οποιαδήποτε $k \geq 2$ πεπερασμένα σύνολα τα οποία είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους, δηλαδή ισχύει $A_i \cap A_j = \varnothing$ για i, j = 1, 2, ..., k με $i \neq j$.

Τότε:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k|$$

ή ακόμη, με χρήση του συμβόλου της άθροισης

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|$$

Ασκήσεις(Σελίδα 24)

1. Από μια πόλη μπορούμε να κατευθυνθούμε προς τα βόρεια μέσω τριών διαφορετικών δρόμων, νότια μέσων τεσσάρων, ανατολικά μέσω δύο και δυτικά μέσω δύο. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να φύγουμε από την πόλη;

2. Οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές χρησιμοποιούν για την αναπαράσταση των πληροφοριών, «λέξεις» οι οποίες αποτελούνται από σειρές (strings) ψηφίων 0 ή 1 π.χ. 10011, 0101110 κλπ. Μια λέξη μεγέθους ν αποτελείται από ν ψηφία.

α. Χρησιμοποιώντας δενδροδιάγραμμα, να υπολογιστεί ο αριθμός των διαφορετικών λέξεων μεγέθους ακριβώς i, όπου $i \leq 4$ που μπορούν να σχηματιστούν.

β. Να υπολογιστεί ο αριθμός των διαφορετικών λέξεων μεγέθους το πολύ 4 που μπορούν να σχηματιστούν.

Ασκήσεις

3. Δίνονται τα σύνολα

$$S_i = \{(x,y) : x, y \in \mathbf{Z} \text{ και } x^2 + y^2 = i\}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

α. Να υπολογιστεί το πλήθος των στοιχείων καθενός από τα σύνολα S_i αφού πρώτα γίνει πλήρης καταγραφή των στοιχείων τους.

β. Να βρεθεί το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $x^2 + y^2 \leq 5$ με χρήση της αρχής του αθροίσματος και των αποτελεσμάτων του ερωτήματος (α).

4. Δίνονται τα σύνολα

$$A = \{(x,y) : x, y \in \{1, 2, \ldots, k\}\}$$

$$A_i = \{(i,y) \in A : y < i\}, \quad i = 2, 3, \ldots, k$$

$$B = \{(x,y) \in A : y < x\}$$

όπου k ένας συγκεκριμένος ακέραιος μεγαλύτερος της μονάδας.

α. Να υπολογιστεί το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Α με χρήση δενδροδιαγράμματος.

β. Για κάθε i = 2, 3, ..., 6, να υπολογιστεί ο πληθικός αριθμός του συνόλου A_i. Αν $i \neq j$, είναι τα σύνολα A_i, A_j ξένα μεταξύ τους;

γ. Με εφαρμογή της αρχής του αθροίσματος, να υπολογιστεί ο πληθικός αριθμός του συνόλου Β.

1.3 Η ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΗ ΑΡΧΗ

Αν το στοιχείο

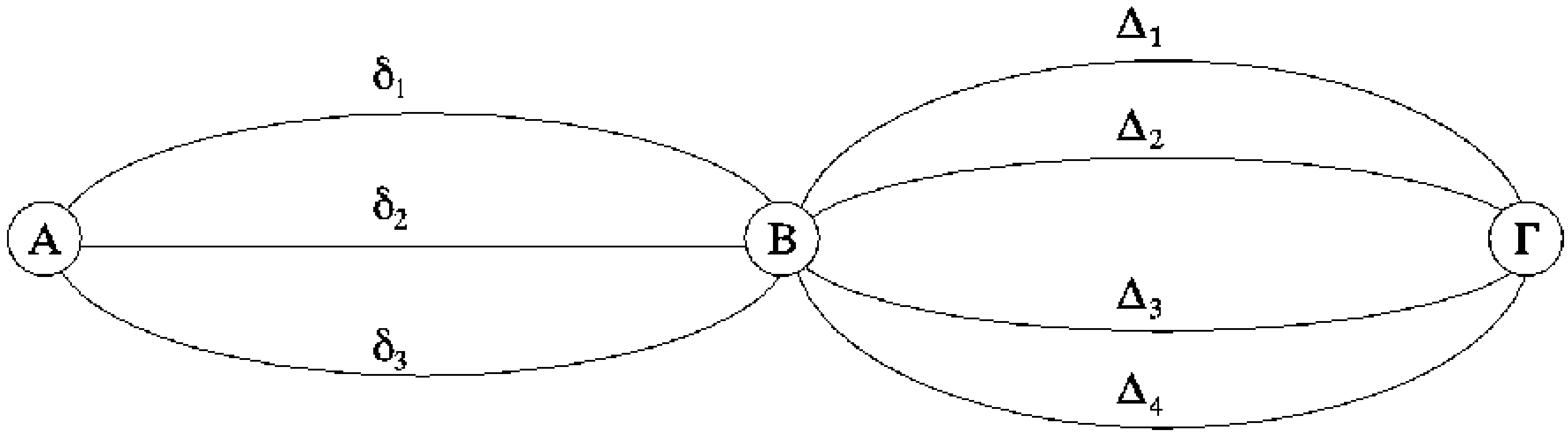
- α_1 μπορεί να επιλεγεί με ν_1 διαφορετικούς τρόπους
- **για κάθε** επιλογή του α_1, το στοιχείο α_2 μπορεί να επιλεγεί με ν_2 διαφορετικούς τρόπους, ... , και
- **για κάθε** επιλογή των α_1 , α_2 , ..., α_{k-1} , το στοιχείο α_k μπορεί να επιλεγεί με ν_k διαφορετικούς τρόπους,

τότε **όλα** τα στοιχεία α_1 , α_2 , ..., α_ν μπορούν να επιλεγούν διαδοχικά και με αυτή τη **συγκεκριμένη σειρά** κατά $\nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \ldots \cdot \nu_k$ τρόπους.

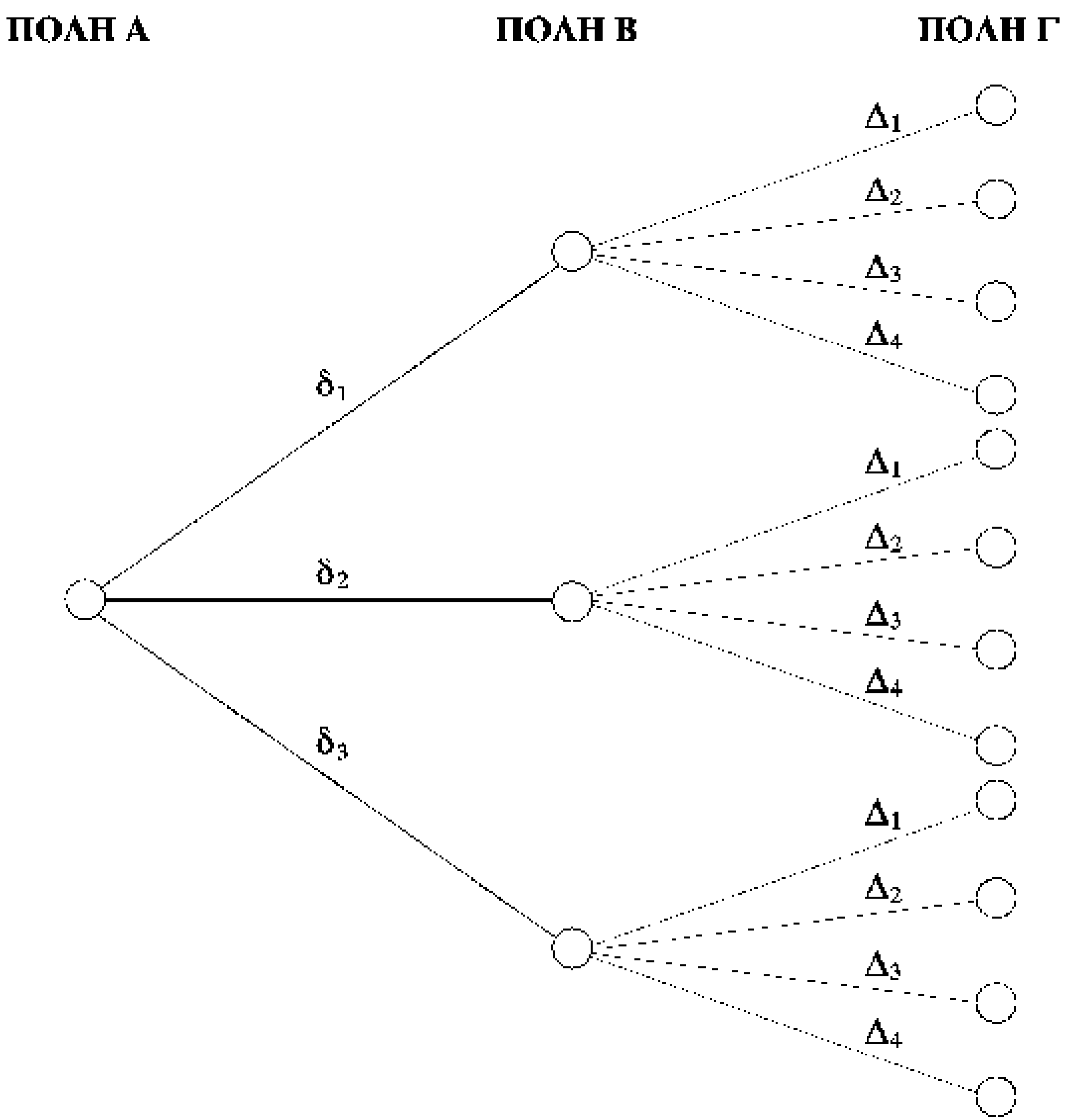
Η πολλαπλασιαστική αρχή μπορεί να διατυπωθεί ανάλογα αν αντικαταστήσουμε τη λέξη «στοιχείο» με τις λέξεις «αντικείμενο», «ενέργεια», «γεγονός» κλπ.

Παράδειγμα 1.3.1

Μια πόλη Α συνδέεται με την πόλη Β μέσω τριών διαφορετικών δρόμων ενώ η πόλη Β συνδέεται με την πόλη Γ μέσω τεσσάρων δρόμων. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να ταξιδέψει κανείς από την πόλη Α στην πόλη Γ;



Η επιλογή του δρόμου που θα χρησιμοποιηθεί για τη μετάβαση από την πόλη Α στην πόλη Β (στοιχείο $α_1$) μπορεί να γίνει με $ν_1 = 3$ τρόπους. Επίσης για κάθε επιλογή του $α_1$ υπάρχουν $ν_2 = 4$ τρόποι επιλογής του δρόμου που θα χρησιμοποιηθεί για τη μετάβαση από την πόλη Β στην πόλη Γ (στοιχείο $α_2$). Επομένως και τα δύο στοιχεία μαζί (και με τη σειρά $α_1$, $α_2$) μπορούν να επιλεγούν κατά $ν_1 ν_2 = 3 \cdot 4 = 12$ διαφορετικούς τρόπους.



ΔΙΑΔΡΟΜΗ
$\delta_1\ \Delta_1$
$\delta_1\ \Delta_2$
$\delta_1\ \Delta_3$
$\delta_1\ \Delta_4$
$\delta_2\ \Delta_1$
$\delta_2\ \Delta_2$
$\delta_2\ \Delta_3$
$\delta_2\ \Delta_4$
$\delta_3\ \Delta_1$
$\delta_3\ \Delta_2$
$\delta_3\ \Delta_3$
$\delta_3\ \Delta_4$

Παράδειγμα 1.3.2

Οι αριθμοί κυκλοφορίας των αυτοκινήτων αποτελούνται από τρία γράμματα και ένα τετραψήφιο αριθμό. Για το πρώτο τμήμα του αριθμού χρησιμοποιούνται μόνο τα 14 ελληνικά γράμματα τα οποία συμπίπτουν με αντίστοιχους λατινικούς χαρακτήρες (Α, Β, Ε, Ζ, Η, Ι, Κ, Μ, Ν, Ο, Ρ, Τ, Υ, Χ) ενώ στην πρώτη θέση του δεύτερου τμήματος δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο αριθμός 0 (ώστε να έχουμε τετραψήφια αριθμό).

α.Πόσοι διαφορετικοί αριθμοί κυκλοφορίας μπορούν να σχηματιστούν;

β.Πόσοι από τους αριθμούς αυτούς έχουν και τα τρία γράμματα του πρώτου τμήματος διαφορετικά μεταξύ τους;

Ας συμβολίσουμε με $\boxed{\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3}\boxed{\alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6\ \alpha_7}$ τα επτά σύμβολα που σχηματίζουν τον αριθμό κυκλοφορίας των αυτοκινήτων.

α. Το στοιχείο α_1 μπορεί να επιλεγεί με $\nu_1 = 14$ διαφορετικούς τρόπους (ένας από τους 14 επιτρεπτούς χαρακτήρες). Για **κάθε επιλογή** του α_1, το α_2 μπορεί να επιλεγεί με $\nu_2 = 14$ διαφορετικούς τρόπους επίσης. Όμοια για το α_3 θα έχουμε $\nu_3 = 14$.
Για **κάθε επιλογή** των α_1, α_2, α_3 (όποτε έχουν καθοριστεί τα τρία γράμματος του αριθμού κυκλοφορίας), το α_4 μπορεί να επιλεγεί κατά $\nu_4 = 9$ διαφορετικούς τρόπους, πιο συγκεκριμένα $\alpha_4 \in \{1, 2, ..., 9\}$ αφού στη θέση αυτή δεν επιτρέπεται η επιλογή του 0. Συνεχίζοντας τη διαδικασία διαπιστώνουμε ότι η επιλογή των α_5, α_6 και α_7 μπορεί να γίνει με $\nu_5 = 10$, $\nu_6 = 10$ και $\nu_7 = 10$ διαφορετικούς τρόπους αντίστοιχα. Άρα τελικά, το πλήθος των διαφορετικών επιλογών για το σχηματισμό του αριθμού κυκλοφορίας είναι:

$$14 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = \mathbf{24.696.000}.$$

$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\quad \alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6\ \alpha_7$

β. Μετά την επιλογή του α_1 (η οποία μπορεί να γίνει με $\nu_1 = 14$ τρόπους) απομένουν μόνο $\nu_2 = 13$ δυνατοί τρόποι επιλογής του α_2 αφού, σύμφωνα με την περιγραφή, το γράμμα που διαλέχτηκε για το α_1 δεν μπορεί να ξαναδιαλεχτεί. Έχοντας ολοκληρώσει την επιλογή των α_1 και α_2, απομένουν μόνο $\nu_3 = 12$ επιλογές για το α_3 αφού και πάλι τα δύο γράμματα που διαλέχτηκαν για τα α_1 και α_2 δεν μπορούν να ξαναδιαλεχτούν. Από το σημείο αυτό η διαδικασία επιλογής συνεχίζεται ακριβώς όπως και στο ερώτημα (α), δηλαδή έχουμε:

$$\nu_4 = 9,\ \nu_5 = \nu_6 = \nu_7 = 10.$$

Επομένως τελικά, υπάρχουν

$$14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 19.656.000$$

αριθμοί κυκλοφορίας στους οποίους τα τρία γράμματα είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

Η ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΗ ΑΡΧΗ

(με ορολογία θεωρίας συνόλων)

Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_k$ οποιαδήποτε $k \geq 2$ πεπερασμένα σύνολα και $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ το καρτεσιανό τους γινόμενο. Τότε

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \ldots |A_k| = \prod_{i=1}^{k} |A_i|$$

Ασκήσεις(Σελίδα 30)

1. Για το Διοικητικό Συμβούλιο (Δ.Σ.) ενός συλλόγου έχουν θέσει υποψηφιότητα 5 άτομα για το αξίωμα του προέδρου, 3 άτομα για το αξίωμα του αντιπροέδρου και 7 άτομα για το αξίωμα του γενικού γραμματέα. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να σχηματιστεί το Δ.Σ.;

2. Μια ασφαλιστική εταιρεία έχει ταξινομήσει τους πελάτες της σε 5 ηλικιακές ομάδες. Για κάθε ομάδα υπάρχουν διαθέσιμα 10 διαφορετικά προγράμματα ασφάλειας ζωής ενώ για τη σύναψη συμφωνίας με τους πελάτες απασχολούνται 4 υπάλληλοι. Αν με την ολοκλήρωση της διαδικασίας ασφάλισης καταχωρούνται και τα τρία στοιχεία που αναφέρθηκαν παραπάνω (ηλικιακή ομάδα, πρόγραμμα, υπάλληλος) πόσοι διαφορετικοί τύποι ασφαλίσεων θα υπάρχουν;

3. Μια εταιρεία αυτοκινήτων προσφέρει τρεις διαφορετικές εκδόσεις ενός μοντέλου της: κανονική (N), πολυτελείας (L) και υπερπολυτελείας (XL). Κάθε έκδοση μπορεί να εφοδιαστεί με ένα από τους εξής τέσσερις κινητήρες: 1.3 lt, 1.5 lt, 1.8 lt και 2.0lt. Τέλος ο υποψήφιος αγοραστής μπορεί να διαλέξει ανάμεσα σε 8 διαφορετικές χρώματα. Πόσες διαφορετικές επιλογές υπάρχουν για το μοντέλο αυτό;

Ασκήσεις

4. Σε ένα διαγώνισμα δίνονται ν ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής. Για την πρώτη ερώτηση υπάρχουν k_1 διαφορετικές απαντήσεις, για τη δεύτερη k_2, ... , για τη ν-στη ερώτηση $k_ν$. Αν ο διαγωνιζόμενος διαλέγει μια μόνο απάντηση σε κάθε ερώτηση, με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να απαντηθεί το διαγώνισμα; Πόσοι θα ήταν οι διαφορετικοί τρόποι απάντησης αν ο διαγωνιζόμενος επιτρεπόταν να αφήνει και αναπάντητες ερωτήσεις;

5. Μια πόλη Α συνδέεται με την πόλη Β μέσω τριών δρόμων, η πόλη Β συνδέεται με την πόλη Γ μέσω πέντε δρόμων ενώ τέλος η πόλη Γ συνδέεται με την πόλη Δ μέσω οκτώ διαφορετικών δρόμων. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να ταξιδέψει κανείς

α. από την πόλη Α προς την πόλη Γ.
β. από την πόλη Β προς την πόλη Δ.
γ. από την πόλη Α προς την πόλη Δ.
δ. από την πόλη Α προς την πόλη Δ και στη συνέχεια να επιστρέψει πίσω στην πόλη Β.

6. Οι αριθμοί κυκλοφορίας των αυτοκινήτων αποτελούνται από τρία γράμματα και ένα τετραψήφιο αριθμό. Για το πρώτο τμήμα του αριθμού χρησιμοποιούνται μόνο τα 14 ελληνικά γράμματα τα οποία συμπίπτουν με αντίστοιχους λατινικούς χαρακτήρες (A, B, E, Z, H, I, K, M, N, O, P, T, Y, X) ενώ στην πρώτη θέση του δεύτερου τμήματος δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο αριθμός 0 (ώστε να έχουμε τετραψήφιο αριθμό). Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 1.3.2 υπάρχουν 24.696.000 τέτοιοι αριθμοί. Πόσοι από τους αριθμούς αυτούς

α. έχουν ως πρώτο γράμμα φωνήεν;
β. έχουν μόνο φωνήεντα στην πρώτη και την τρίτη θέση;
γ. δεν περιέχουν στο δεύτερο τμήμα τους ίδια ψηφία;
δ. περιέχουν στο δεύτερο τμήμα τους ακριβώς τρία ίδια ψηφία;

7. Κατά μήκος μιας σιδηροδρομικής γραμμής υπάρχουν ν σταθμοί. Πόσα διαφορετικά είδη εισιτηρίων θα πρέπει να τυπωθούν ώστε να καλύπτονται όλες οι δυνατές διαδρομές μεταξύ των ν σταθμών;

Ασκήσεις

8. Ένας ψυχολόγος θέλει να ετοιμάσει λέξεις αποτελούμενες από τρία γράμματα ώστε να τις χρησιμοποιήσει σε ένα τεστ μνήμης (οι λέξεις που θα σχηματιστούν δεν είναι απαραίτητο να έχουν κάποιο νόημα). Ο ψυχολόγος διαλέγει το πρώτο γράμμα της λέξης ανάμεσα από τα σύμφωνα Β, Ν, Δ, Σ, το τρίτο από τα σύμφωνα Ν, Σ, Θ, Κ, Λ, Μ, ενώ το μεσαίο γράμμα από τα φωνήεντα Α, Ο και Η.

α. Πόσες διαφορετικές λέξεις μπορεί να σχηματίσει;

β. Πόσες από τις λέξεις αυτές

i. αρχίζουν με το γράμμα Δ;

ii. τελειώνουν με το γράμμα Ν ή το γράμμα Σ;

iii. αρχίζουν και τελειώνουν με το ίδιο γράμμα;

iv. δεν περιέχουν καθόλου το γράμμα Ν;

9. Να βρεθεί το πλήθος των άρτιων τετραψήφιων αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν χρησιμοποιώντας μόνο τα ψηφία 1, 2, 5, 6, 8, 9. Πόσοι από τους αριθμούς αυτούς έχουν όλα τα ψηφία τους διαφορετικά;

10. Ένα δελτίο προγνωστικών ποδοσφαίρου (ΠΡΟΠΟ) περιλαμβάνει 13 αγώνες δίπλα στους οποίους σημειώνεται 1, Χ ή 2 για να δηλωθεί η νίκη της γηπεδούχου ομάδας, ισοπαλία ή νίκη της φιλοξενούμενης ομάδας αντίστοιχα. Μια στήλη προγνώσεων αποτελείται από 13 συνολικά σύμβολα, ένα για κάθε αγώνα, τοποθετημένα δίπλα στα αντίστοιχα ζευγάρια των ομάδων που αγωνίζονται.

α. Ποιος είναι ο αριθμός των διαφορετικών στηλών που μπορούν να σχηματιστούν;

β. Αν θέλουμε να παίξουμε ένα σύστημα στο οποίο να χρησιμοποιήσουμε 2 σύμβολα (διπλή παραλλαγή) για i συγκεκριμένους αγώνες και 3 σύμβολα (τριπλή παραλλαγή) για j άλλους συγκεκριμένους αγώνες, πόσες διαφορετικές στήλες θα προκύψουν; $\left(0 \le i \le 13,\ 0 \le j \le 13,\ i + j \le 13\right)$