

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ (Δείγμα Θεμάτων)

Φεβρουάριος 2006

Μέρος Ι (μέγιστος αριθμός μονάδων=40)

Δώστε την κατάλληλη απάντηση (ΣΩΣΤΗ ή ΛΑΘΟΣ) στις παρακάτω προτάσεις. Κάθε σωστή επιλογή παίρνει 5 μονάδες. Για κάθε λανθασμένη επιλογή αφαιρούνται πέντε μονάδες

1. Έστω $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο με n (διαφορετικά μεταξύ τους) στοιχεία x_1, x_2, \dots, x_n και k ένας θετικός ακέραιος. Τότε κάθε διατεταγμένη k -αδα (a_1, a_2, \dots, a_k) που αποτελείται από k διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία του X ($k \leq n$) λέγεται συνδυασμός των n στοιχείων ανά k .

Συμπληρώστε Σ ή Λ

2. Αν A, B είναι υποσύνολα ενός πεπερασμένου βασικού συνόλου Ω , τότε θα ισχύει πάντοτε η σχέση $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Συμπληρώστε Σ ή Λ

3. Αν n και k είναι θετικοί ακέραιοι με $1 \leq k \leq n$ τότε ισχύει πάντοτε η σχέση

$$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Συμπληρώστε Σ ή Λ

4. Αν τα σύνολα A_1, A_2, \dots, A_n είναι ανταλλάξιμα και για κάθε επιλογή $r \geq 1$ δεικτών i_1, i_2, \dots, i_r από το σύνολο δεικτών $\{1, 2, \dots, n\}$ θέσουμε $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r}| = n_r$, ΤΟΤΕ

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \binom{n}{r} n_r.$$

Συμπληρώστε Σ ή Λ

5. Όταν k διαφορετικά σφαιρίδια τοποθετούνται σε n διαφορετικά κελιά (χωρίς κανένα περιορισμό), τότε το πλήθος των διαφορετικών τρόπων τοποθέτησης των σφαιριδίων στα κελιά είναι ίσος με $\binom{v}{k} = \binom{v+k-1}{v-1}$

Συμπληρώστε Σ ή Λ

6. Για τους αριθμούς $\binom{v}{k}$, $1 \leq k \leq v$ των συνδυασμών των n στοιχείων ανά k ισχύει ότι

$$\binom{v}{k} = \binom{v}{v-k}$$

Συμπληρώστε Σ ή Λ

7. Αν α, β είναι δύο πραγματικοί αριθμοί και n ένας θετικός ακέραιος τότε

$$\binom{\alpha+\beta}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k}.$$

Συμπληρώστε Σ ή Λ

8. Αν θεωρήσουμε επάνω στην περιφέρεια ενός κύκλου n σημεία τότε μπορούμε να σχηματίσουμε, χρησιμοποιώντας τα σημεία αυτά,

$$\binom{v}{3} = \frac{v(v-1)(v-2)}{6}$$

Συμπληρώστε Σ ή Λ

διαφορετικά τρίγωνα.

Μέρος II (μέγιστος αριθμός μονάδων=40)

Στις επόμενες ερωτήσεις διαλέξτε μια από τις πέντε επιλογές που δίνονται. Κάθε σωστή επιλογή παίρνει 5 μονάδες. Για κάθε λανθασμένη επιλογή αφαιρείται μία μονάδα

1. Αν το στοιχείο α_1 μπορεί να επιλεγεί με v_1 διαφορετικούς τρόπους, το α_2 με v_2 διαφορετικούς τρόπους, ..., το α_k με v_k διαφορετικούς τρόπους, τότε η επιλογή του α_1 ή α_2 ή ... ή α_k μπορεί να γίνει με
- α. $v_1 + v_2 + \dots + v_k$ διαφορετικούς τρόπους.
 - β. $v_1 \cdot v_2 \cdots v_k$ διαφορετικούς τρόπους.
 - γ. $(v_1 \cdot v_2 \cdots v_k) / (v_1 + v_2 + \dots + v_k)$ διαφορετικούς τρόπους, εφόσον η επιλογή του στοιχείου α_i αποκλείει την επιλογή του στοιχείου α_j με $j \neq i$.
 - δ. $v_1 \cdot v_2 \cdots v_k$ διαφορετικούς τρόπους, εφόσον η επιλογή του στοιχείου α_i αποκλείει την επιλογή του στοιχείου α_j με $j \neq i$.
 - ε. $v_1 + v_2 + \dots + v_k$ διαφορετικούς τρόπους, εφόσον η επιλογή του στοιχείου α_i αποκλείει την επιλογή του στοιχείου α_j με $j \neq i$.

Συμπληρώστε α, β, γ, δ ή ε

2. Έστω $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο με n (διαφορετικά μεταξύ τους) στοιχεία x_1, x_2, \dots, x_n και k ένας θετικός ακέραιος. Τότε κάθε (μη διατεταγμένη) συλλογή αποτελούμενη από k διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ του X ($k \leq n$) λέγεται
- α. Επαναληπτική μετάθεση των n στοιχείων ανά k .
 - β. Μετάθεση των n στοιχείων ανά k .
 - γ. Συνδυασμός των n στοιχείων ανά k .
 - δ. Διάταξη των n στοιχείων ανά k .
 - ε. Μετάθεση των n ειδών στοιχείων ανά k .

Συμπληρώστε α, β, γ, δ ή ε

3. Αν A, B είναι υποσύνολα ενός πεπερασμένου βασικού συνόλου Ω , τότε
- α. $|A \cup B| = |A| + |B|$
 - β. $|A \cap B| = |A| \cdot |B|$
 - γ. $|A \cup B| = |A| + |B| + |A \cap B|$
 - δ. $|A \cap B| + |A \cup B| = |A| + |B|$
 - ε. $|A \cup B| - |A \cap B| = |A| + |B|$

Συμπληρώστε α, β, γ, δ ή ε

4. Έστω A, B δύο υποσύνολα ενός πεπερασμένου βασικού συνόλου Ω . Η ισότητα $|A \cup B| = |A| + |B| + |A \cap B|$ ισχύει
- α. πάντοτε
 - β. όταν $A \cup B = \Omega$
 - γ. όταν $A \cap B = \emptyset$
 - δ. όταν $A \subseteq B$
 - ε. όταν $B \subseteq A$

Συμπληρώστε α, β, γ, δ ή ε

5. Αν α, β είναι δύο πραγματικοί αριθμοί και n ένας θετικός ακέραιος τότε
- α. $(\alpha + \beta)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \alpha^k \beta^{n-k}$
 - β. $(\alpha + \beta)^n = \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} \alpha^{n-k} \beta^k$
 - γ. $(\alpha + \beta)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k \beta^k$
 - δ. $(\alpha - \beta)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k}$
 - ε. $(\alpha + \beta)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \alpha^k \beta^{n-k}$

Συμπληρώστε α, β, γ, δ ή ε

6. Το άθροισμα $\sum_{k=0}^{2v} \binom{2v}{k}$ είναι ίσο με

α. $\binom{3v}{k}$ β. $\binom{2v}{v} 2^v$ γ. $\binom{4v}{v}$ δ. $\binom{5v}{v}$ ε. 4^v

Συμπληρώστε α, β, γ, δ ή ε

7. Θέλουμε να σχηματίσουμε λέξεις έξι γραμμάτων τέτοιες ώστε το πρώτο και το τρίτο γράμμα να είναι φωνήεν ενώ το δεύτερο, το τέταρτο, το πέμπτο και το έκτο γράμμα να είναι σύμφωνα; Το πλήθος των διαφορετικών λέξεων που μπορούν να προκύψουν είναι ίσο με

α. $7^2 \cdot 17^4$ γ. $7 \cdot 17$ ε. $\binom{24}{7} \cdot \binom{24}{17}$
 β. 24^6 δ. $24^6 \cdot 7^4 \cdot 17^2$

Συμπληρώστε α, β, γ, δ ή ε

8. Ας θεωρήσουμε $v \geq 2$ διαφορετικά γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου. Πόσες διαφορετικές λέξεις μπορούν να σχηματιστούν χρησιμοποιώντας κάθε ένα από τα γράμματα αυτά ακριβώς 4 φορές;

α. $\frac{(4v)!}{(4!)^v}$ γ. $\binom{4v}{v}$ ε. $\frac{(4v)!}{4^v}$
 β. $\frac{v!}{(4!)^v}$ δ. $\frac{(4!)^v}{(4v)!}$

Συμπληρώστε α, β, γ, δ ή ε

