Σύντομη Εισαγωγή στις Στοχαστικές Ανελίξεις

• Αν το αποτέλεσμα ενός τυχαίου πειράματος είναι

- *ένας αριθμός* (R), τότε μπορεί να εκφραστεί με μία τ.μ. $X \in$ R
- k *αριθμοί* (R^k) τότε μπορεί να εκφραστεί με ένα τ.δ. $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_k) \in \mathrm{R}^k$

• Υπάρχουν πειράματα με ακόμη «συνθετότερο» σύνολο αποτελεσμάτων, π.χ.:

- *η παρακολούθηση μιας διαδικασίας αφίξεων πελατών σε ένα κατάστημα,*
- *η παρακολούθηση της εξέλιξης της τιμής μιας μετοχής κατά τη διάρκεια του χρόνου*

• Εδώ επιθυμούμε να γνωρίζουμε την τιμή μιας ή περισσοτέρων ποσοτήτων (π.χ. πλήθος αφίξεων ή τιμή μετοχής) *κάθε* χρονική στιγμή t. Εκφράζουμε ένα τέτοιο «σύνθετο» αποτέλεσμα μέσω μιας ***στοχαστικής ανέλιξης*** $\{X(t), t \geq 0\}$

(π.χ. $X(t)$ = *τιμή της ποσότητας που μελετούμε την χρονική στιγμή* t)

Η στοχαστική ανέλιξη ως τυχαία συνάρτηση

Είναι γνωστό ότι

- ***τυχαία μεταβλητή*** $X : (\Omega, A, P) \to R$

$$\omega \quad \to \quad X(\omega) \quad (\textit{αριθμός})$$

- ***τυχαίο διάνυσμα*** $\mathbf{X} : (\Omega, A, P) \to R^k$

$$\omega \quad \to \quad \mathbf{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \quad (\textit{διάνυσμα})$$

- Αντίστοιχα τώρα, μία ***στοχαστική ανέλιξη***

$$\{X(t), t \geq 0\} : (\Omega, A, P) \to D = \{\textit{συναρτήσεις}: R_+ \to R\}$$

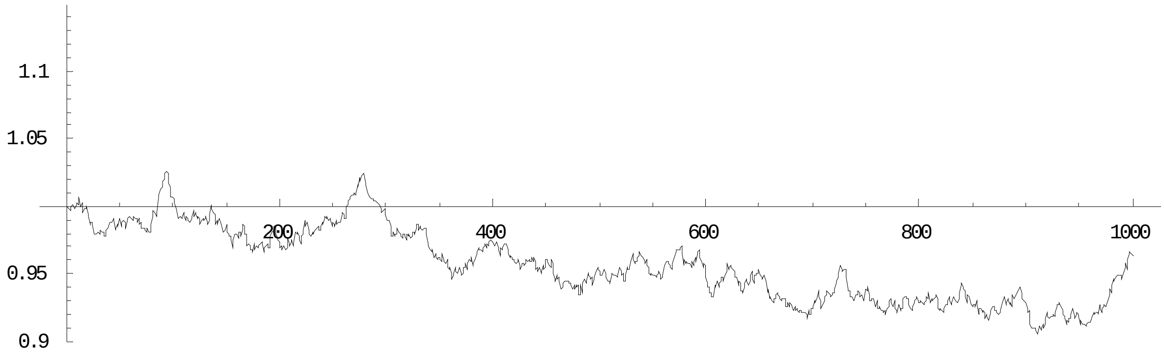
$$\omega \to \{X(t), t \geq 0\}(\omega) = \{X(t,\omega), t \geq 0\} \quad (\textit{συνάρτηση του } t)$$

- Για συγκεκριμένο ω, η συνάρτηση $X_\omega(t) = X(t,\omega)$, $t \geq 0$ καλείται "*διαδρομή*" (*path*)

Παράδειγμα (α)

- Έστω ότι η $\{X(t),\ t \geq 0\}$ περιγράφει την εξέλιξη της ***τιμής μιας μετοχής*** στο χρόνο:

 - μια πραγματοποίησή της $\{X(t,\omega),\ t \geq 0\}$ (*για συγκεκριμένο* ω) μπορεί να έχει τη μορφή



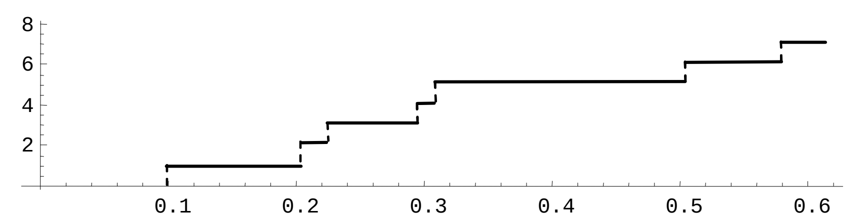
- Η πραγματοποίηση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως μία απεικόνιση από το R_+ στον R

(*εδώ πρόκειται μάλιστα για συνεχή συνάρτηση διότι θεωρούμε ότι η εξέλιξη της τιμής δεν παρουσιάζει άλματα*).

Παράδειγμα (β)

- Έστω ότι η $\{X(t),\ t \geq 0\}$ περιγράφει το ***πλήθος των πελατών*** που έχουν εισέλθει σε ένα κατάστημα στο χρονικό διάστημα $[0, t]$.

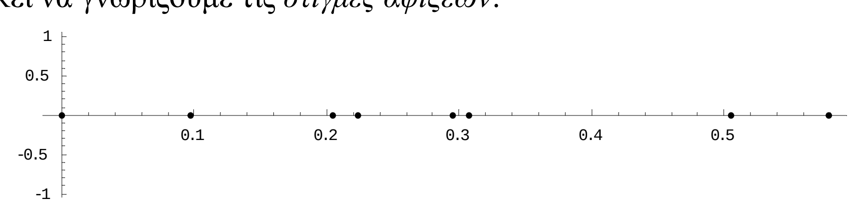
- μια πραγματοποίησή της $\{X(t,\omega),\ t \geq 0\}$ (*για συγκεκριμένο* ω) μπορεί να έχει τη μορφή



(*την χρονική στιγμή* 0.096 *εισήλθε ο* $1^{ος}$ *πελάτης, τη χρονική στιγμή* 0.204 *εισήλθε ο* $2^{ος}$, *κ.ο.κ.*)

- Η $\{X(t,\omega),\ t \geq 0\}$ μπορεί να θεωρηθεί ως μία απεικόνιση από το $R_+ \to N$

- Εδώ αρκεί να γνωρίζουμε τις *στιγμές αφίξεων*:



1. Ανέλιξη Poisson

- Στοχαστικές ανελίξεις $\{N(t), t \geq 0\}$ όπως αυτή του παραδείγματος (β) παραπάνω καλούνται ***απαριθμήτριες στοχαστικές ανελίξεις*** (*counting processes*).

- Γενικά, απαριθμήτριες στοχαστικές ανελίξεις $\{N(t), t \geq 0\}$ καλούνται οι ανελίξεις στις οποίες η $N(t)$ εκφράζει το πλήθος κάποιων γεγονότων που συνέβησαν μέχρι και το χρόνο t.

- Παραδείγματα:

\- *αφίξεις πελατών σε κατάστημα*
\- *αφίξεις ασθενών σε νοσοκομείο*
\- *απαιτήσεις ζημιάς ασφαλισμένων κινδύνων*
\- *γεννήσεις παιδιών σε μια περιοχή*
\- *θάνατοι έμβιων όντων*

- Από το ορισμό της μια απαριμήτρια στοχαστική ανέλιξη πρέπει να ικανοποιεί:

1. $N(t) \in \{0,1,2\ldots\}$,
2. $N(t)$ αύξουσα συνάρτηση του t,
3. η τυχαία μεταβλητή $N(t) - N(s)$ ισούται με το πλήθος των συμβάντων στο χρονικό διάστημα $(s, t]$ $(s < t)$

- Μια απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη θα λέμε ότι έχει:

(1) **Ανεξάρτητες προσαυξήσεις** αν οι αριθμοί των συμβάντων σε ξένα χρονικά διαστήματα είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

(π.χ. οι $N(t_2) - N(t_1)$, $N(s_2) - N(s_1)$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. αν $(t_1,t_2]\cap(s_1,s_2] = \varnothing$)

(2) **Ισόνομες προσαυξήσεις** αν ο αριθμός των συμβάντων σε ένα χρονικό διάστημα $(t, t + x]$ ακολουθεί μια κατανομή η οποία εξαρτάται μόνο από το μήκος του διαστήματος, x.

(π.χ. οι $N(t + x) - N(t)$, $N(s + x) - N(s)$ έχουν την ίδια κατανομή)

- Η απλούστερη απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη είναι η **ανέλιξη Poisson**.

Ορισμός. Μία στοχαστική ανέλιξη $\{N(t), t \geq 0\}$ καλείται ανέλιξη Poisson με ένταση λ αν

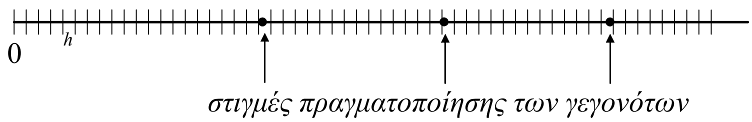
(1) $N(0) = 0$
(2) έχει *ανεξάρτητες προσαυξήσεις*
(3) έχει *ισόνομες προσαυξήσεις* και μάλιστα σε διάστημα μήκους x το πλήθος των συμβάντων ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λx.

- Επειδή $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ προκύπτει ότι $E(N(t)) = \lambda t$.

1.2. Διαισθητική κατασκευή ανέλιξης Poisson:

• Θεωρούμε ότι τα γεγονότα που μας ενδιαφέρουν συμβαίνουν σε τυχαίες χρονικές στιγμές ως εξής:

- σε κάθε *πολύ μικρό* χρονικό διάστημα $(t, t + h]$ συμβαίνει *ένα* γεγονός (*ανεξάρτητα* από τα υπόλοιπα διαστήματα) με *πολύ μικρή* πιθανότητα, ίση *περίπου με* λh.



• Πιο αυστηρά θεωρούμε ότι

P(*ένα γεγονός στο* $(t, t+h]) = \lambda h + o(h)$,
P(*κανένα γεγονός στο* $(t, t+h]) = 1-\lambda h + o(h)$,
P(*περισσότερα από* 1 *γεγονότα στο* $(t, t+h]) = o(h)$

όπου με $o(h)$ συμβολίζουμε μία οποιαδήποτε συνάρτηση, π.χ. $f(h)$, με την ιδιότητα $f(h)/h \to 0$ όταν $h \to 0$, δηλαδή μία συνάρτηση που συγκλίνει στο 0 *πιο γρήγορα* από ότι συγκλίνει η ταυτοτική $g(h) = h$ όταν $h \to 0$ (π.χ. $f(h) = c \cdot h^2$ ή $f(h) = h^{3/2} + h^{5/4}$)

• Το $\lambda > 0$ εκφράζει την ένταση (intensity) με την οποία εμφανίζονται τα γεγονότα.

• Σύμφωνα με το παραπάνω μοντέλο, αν $N(t)$ = *πλήθος συμβάντων στο* (0,t] τότε

(1) $N(0) = 0$
(2) η $\{N(t), t \geq 0\}$ έχει *ανεξάρτητες προσαυξήσεις* (γιατί έχουμε υποθέσει ότι τα γεγονότα εμφανίζονται ή όχι στα υποδιαστήματα ανεξάρτητα από ό,τι συμβαίνει στα υπόλοιπα υποδιαστήματα)

- Απομένει να δούμε την κατανομή που ακολουθούν οι προσαυξήσεις $N(t + x) - N(t)$:

Χωρίζουμε το $(t, t+x]$ σε n διαστήματα μήκους $h = x/n$ το καθένα. Θα ισχύει ότι

$$P(N(t+x) - N(t) = k) = \lim_n P(k \text{ συμβάντα στα } n \text{ διαστήματα του } (t, t+x])$$

$$= \lim_n \binom{n}{k} (\lambda h + o(h))^k (1 - \lambda h + o(h))^{n-k} = e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}, \; k = 0, 1, \ldots$$

και επομένως,

(3) η $\{N(t), t \geq 0\}$ έχει *ισόνομες προσαυξήσεις*. Μάλιστα, σε διάστημα μήκους x το πλήθος των συμβάντων ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λx.

• Δηλαδή η παραπάνω διαδικασία (το όριο της διαδικασίας που κατασκευάσαμε) είναι μια ανέλιξη Poisson.

1.3. Η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων

• Αν T ο χρόνος μέχρι την εμφάνιση του 1ου γεγονότος. Θα ισχύει ότι

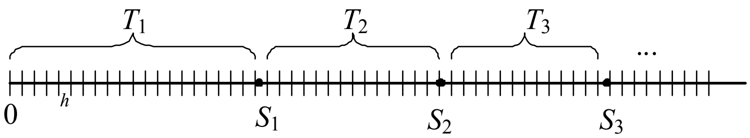
$$P(T > t) = P(N(t) - N(0) = 0) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$$

και άρα T ~ *εκθετική*(λ).

• Αν T_1 ο χρόνος μέχρι την εμφάνιση του 1ου γεγονότος, είδαμε ότι T_1 ~ *εκθετική*(λ). Έστω $S_1, S_2, \ldots$ οι *διαδοχικοί χρόνοι εμφάνισης* των συμβάντων και

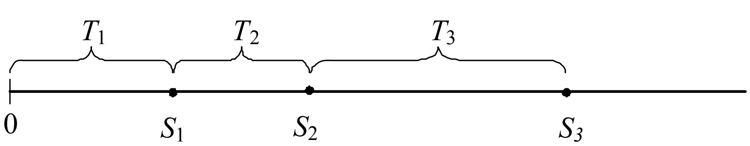
$$T_i = S_i - S_{i-1},\ i = 2,3,\ldots$$

οι *ενδιάμεσοι χρόνοι* μεταξύ του $i - 1$ και του i-συμβάντος ($S_1 = T_1$).



• Αν θεωρήσουμε το μοντέλο μας στο $[S_1, \infty)$, τότε παρατηρούμε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το αρχικό στο $[0, \infty)$ (από τη στιγμή S_1 και μετά, σε κάθε απειροστό χρονικό διάστημα θα συμβαίνει είτε ένα (με πιθ. λh) είτε κανένα (με πιθ. $1-\lambda h$) γεγονός, ανεξάρτητα από τα άλλα διαστήματα).

• Επομένως ο χρόνος T_2 (από το 1ο μέχρι το 2ο συμβάν) θα έχει την ίδια κατανομή με τον χρόνο T_1 και μάλιστα θα είναι ανεξάρτητος του T_1 (δεν εξαρτάται από τι έχει συμβεί πριν το S_1).



• Επομένως, όλοι οι ενδιάμεσοι χρόνοι $T_1, T_2, \ldots$ θα ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο λ και μάλιστα θα είναι μεταξύ τους ανεξάρτητοι.

• Επομένως και

$$S_k = T_1 + T_2 + \ldots + T_k \sim \text{Gamma}(k,\lambda).$$

• **Απλό παράδειγμα**: Πελάτες προσέρχονται σε ένα κατάστημα με ένταση λ = 10 όπου ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Θα έχουμε π.χ. ότι

- το μέσο (αναμενόμενο) πλήθος πελατών ανά ώρα είναι 10 ($E(N(t)) = \lambda t$).

- το μέσο πλήθος πελατών σε τρείς ώρες είναι 30.

- το μέσο πλήθος πελατών σε μισή ώρα είναι 5.

- Ο χρόνος έως την εμφάνιση ενός πελάτη ~ *εκθ.* (λ) με μέση τιμή 1/λ = 1/10 ώρας.

- Οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ αφίξεων ~ *εκθ.* (λ) με μέση τιμή 1/λ = 1/10 ώρας.

- Ο χρόνος έως την εμφάνιση k = 20 πελατών ~ *γάμμα* (k,λ) με μέση τιμή k/λ = 2 ώρες.

- Η πιθανότητα να εισέλθουν περισσότεροι από 15 πελάτες σε μια ώρα είναι

$$P(N(1) > 15) = 1 - \sum_{i=0}^{15} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} = 1 - \sum_{i=0}^{15} e^{-10} \frac{10^i}{i!} \approx 0.0487$$

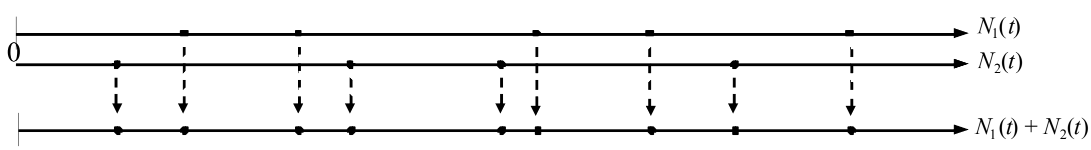
- Η πιθανότητα να περιμένουμε περισσότερο από 2 ώρες για να εισέλθουν 15 πελάτες είναι

$$P(S_{15} > 2) = 1 - F_{Gamma(15,\lambda=10)}(2) \approx 0.104864$$

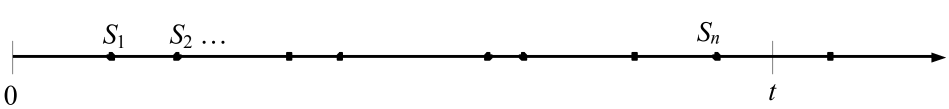
• Αν $\{N_1(t), t \geq 0\}$, $\{N_2(t), t \geq 0\}$ είναι δύο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με εντάσεις λ_1, λ_2 αντίστοιχα, τότε το άθροισμά τους

$$\{N_1(t)+N_2(t), t \geq 0\},$$

είναι και πάλι διαδικασία Poisson με παράμετρο $\lambda_1+\lambda_2$.



• δεδομένου ότι $N(t) = n$, οι (μη-διατεταγμένοι) χρόνοι των n συμβάντων στο $[0,t]$ είναι *ανεξάρτητοι* και *ακολουθούν* την Ομοιόμορφη κατανομή U(0,t)



1.4. Η (μη ομογενής) ανέλιξη Poisson

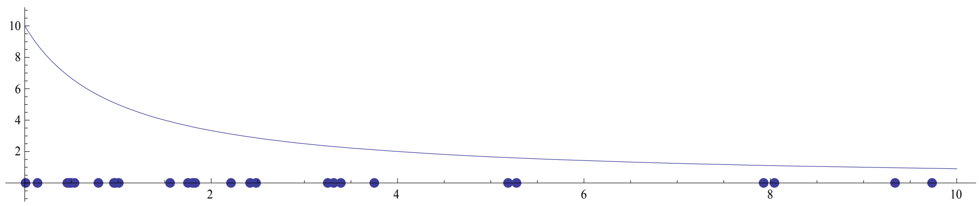
• Σε πολλές εφαρμογές η ένταση λ εμφανίσεων των συμβάντων δεν είναι σταθερή, αλλά γενικότερα συνάρτηση του χρόνου (π.χ. οι αφίξεις πελατών εξαρτώνται από την ώρα της ημέρας).

Η κατασκευή της ανέλιξης Poisson σε αυτή την περίπτωση είναι παρόμοια:

• Μια σ.α. $\{N(t), t \geq 0\}$ καλείται (*μη ομογενής*) *ανέλιξη Poisson* στο $[0,\infty)$ με *συνάρτηση έντασης* $\lambda(t)$, $t \geq 0$, αν

- P(*ένα γεγονός στο* $(t, t+h]) = \lambda(t)h + o(h)$,
- P(*κανένα γεγονός στο* $(t, t+h]) = 1-\lambda(t)h + o(h)$,
- P(*περισσότερα από* 1 *γεγονότα στο* $(t, t+h]) = o(h)$

• Π.χ. αν $\lambda(t)$=10/(1+t), μια πραγματοποίηση θα έχει την μορφή,



• Αποδεικνύεται ότι και πάλι

(1) $N(0) = 0$

(2) η $\{N(t), t \geq 0\}$ έχει *ανεξάρτητες προσαυξήσεις*

(3) *Δεν έχει γενικά ισόνομες προσαυξήσεις* διότι

$$\Pr(N(t+x)-N(t)=k)=e^{-\Lambda_t(x)}\frac{\Lambda_t(x)^k}{k!}, \quad \text{όπου} \quad \Lambda_t(x)=\int_t^{t+x}\lambda(s)\,ds$$

• Δηλαδή οι προσαυξήσεις στο $(t, t+x]$ ακολουθούν και πάλι την Poisson αλλά με μέση τιμή $\Lambda_t(x)$ η οποία εξαρτάται από τα άκρα του διαστήματος $(t, t+x]$.

- Π.χ. αν $\lambda(t)$=10/(1+t) τότε

$$\Lambda_t(x)=\int_t^{t+x}\lambda(s)\,ds=\int_t^{t+x}\frac{10}{1+s}\,ds=10(\ln(1+t+x)-\ln(1+t))$$

• Επομένως, θα είναι $E(N(t)) = \Lambda_0(t)=\int_0^t \lambda(s)\,ds$

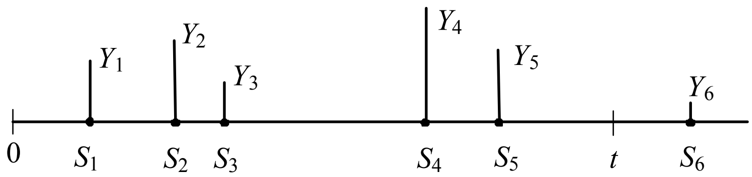
- Π.χ. αν $\lambda(t)$=10/(1+t) τότε $\Lambda_0(10)=10\ln(1+10)\approx 23.02$

• Αν $\lambda(t) = \lambda$ τότε προκύπτει η ***ομογενής*** διαδικασία ***Poisson*** που εξετάσαμε παραπάνω.

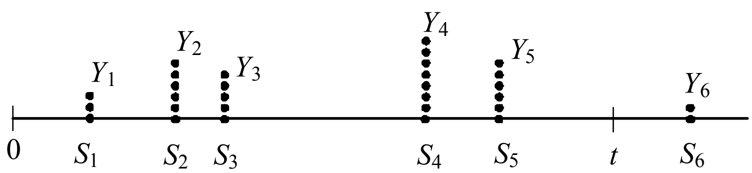
1.5. Ανέλιξη σύνθετη Poisson (compound Poisson)

• Σε αρκετές εφαρμογές, στα συμβάντα 1,2, … μιας ανέλιξης Poisson που εμφανίζονται στους χρόνους S_1, S_2, … αντιστοιχούν κάποιες (ανεξάρτητες) τυχαίες μεταβλητές Y_1, Y_2, … αντίστοιχα.

- π.χ. τα συμβάντα είναι *απαιτήσεις ζημίας* και Y_i : *χρηματικό ύψος* της *i*-απαίτησης:



- π.χ. τα συμβάντα είναι *αφίξεις ομάδων πελατών* και Y_i : *το πλήθος των ατομων* της ***i***-ομάδας:



• Στις παραπάνω περιπτώσεις μας ενδιαφέρει η στοχαστική ανέλιξη

$$M(t) = Y_1 + Y_2 + ... + Y_{N(t)} \ , \ t \geq 0$$

η οποία εκφράζει το άθροισμα των Y_i που αντιστοιχούν σε εμφανίσεις συμβάντων μέχρι και το χρόνο t. ($M(t) = 0$ αν $N(t) = 0$).

π.χ. η $M(t)$ εκφράζει στο *συνολικό ύψος των απαιτήσεων ζημίας* μέχρι και το χρόνο t.

π.χ. η $M(t)$ εκφράζει στο *συνολικό πλήθος των ατόμων* που καταφθάνουν κατά ομάδες.

• Η παραπάνω στοχαστική διαδικασία καλείται ***Compound Poisson Process*** (λ, F)

• Οι τ.μ. Y_1, Y_2, … θεωρούνται ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ., ανεξάρτητες και από την $\{N(t), t \geq 0\}$, οι οποίες ακολουθούν μια κατανομή F.

• Ισχύει ότι

$$P(M(t) \leq x) = P(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \leq x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \leq x \mid N(t) = k) P(N(t) = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(\sum_{i=1}^{k} Y_i \leq x) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} F^{(k)}(x)\, e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

όπου $F^{(k)}$ είναι η σ.κ. του αθροίσματος των τ.μ. $Y_1 + \ldots + Y_k$.

• Χρησιμοποιώντας τον γνωστό κανόνα $E(E(X|Y)) = E(X)$,

$$E(M(t)) = E(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i) = E(E(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \mid N(t))) = E(N(t)E(Y)) = \lambda t E(Y)$$

• Χρησιμοποιώντας τον γνωστό κανόνα $V(X) = E(V(X \mid Y)) + V(E(X \mid Y))$,

$$V(M(t)) = E(V(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \mid N(t))) + V(E(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \mid N(t))) = E(N(t)\, V(Y)) + V(N(t)E(Y))$$

$$= V(Y)E(N(t)) + E(Y)^2 V(N(t)) = V(Y)\lambda t + E(Y)^2 \lambda t = \lambda t\, E(Y^2)$$

• **Παράδειγμα**. Απαιτήσεις ζημίας ασφαλισμένων κινδύνων εμφανίζονται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ένταση λ = 10 (μονάδα του χρόνου ο μήνας).

-Τα ύψη των απαιτήσεων Y_1, Y_2 είναι ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν μια κατανομή F με μέση τιμή 1000 και τυπική απόκλιση 100.

- Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του συνολικού ποσού που καλείται να καλύψει ο ασφαλιστής μηνιαία θα είναι

$$E(M(t)) = \lambda t E(Y) = 10 \cdot 1 \cdot 1000 = 10000$$

$$\sigma_{M(t)} = \sqrt{V(M(t))} = \sqrt{\lambda t\,(V(Y) + E(Y)^2)} = \sqrt{10 \cdot 1(100^2 + 1000^2)} \approx 3178$$

2. Μαρκοβιανές Αλυσίδες

2.1. Μαρκοβιανές Αλυσίδες διακριτού χρόνου

• Έστω στοχαστική ανέλιξη $\{X_i, i = 0,1,..\}$ με τιμές στο $\{0,1,\ldots\}$

• οι τιμές $\{0,1,\ldots\}$ καλούνται καταστάσεις (αν π.χ. $X_n = i$ τότε στο χρόνο n η α-νέλιξη βρίσκεται στην κατάσταση i).

• Αν η $\{X_i, i = 0,1,..\}$ ικανοποιεί την ιδιότητα:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = p_{ij}$$

για όλες τις καταστάσεις j, i, i_{n-1}, …, i_0 και για όλους τους χρόνους n τότε καλείται *Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου*.

• Η παραπάνω υποδηλώνει ότι (Μαρκοβιανή Ιδιότητα):

η κατάσταση που θα βρεθεί η αλυσίδα στο μέλλον ($X_{n+1} = j$) *επηρεάζεται μόνο από την κατάσταση που έχει στο παρόν* ($X_n = i$) *και όχι από το παρελθόν* ($X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0$).

• Η ποσότητα

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

εκφράζει την πιθανότητα μεταπήδησης της X από την κατάσταση i στην κατάσταση j.

• Η στοχαστική συμπεριφορά της μαρκοβιανής αλυσίδας περιγράφεται από τον πίνακα πιθανοτήτων μεταπήδησης

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0j} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & & p_{1j} & \\ \vdots & & \ddots & & \\ p_{i0} & p_{i1} & & p_{ij} & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

• Τα αθροίσματα των γραμμών είναι ίσα με 1.

Παράδειγμα 1.

• Έστω ότι $X_i = 1$ ή 0 ανάλογα με το αν την i-μέρα βρέχει ή όχι.

• Για απλότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι πρόκειται για Μαρκοβιανή αλυσίδα με

$$P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0) = p_{01} = 0.2\,,$$

$$P(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0) = p_{00} = 0.8$$

$$P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1) = p_{11} = 0.6\,,$$

$$P(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1) = p_{10} = 0.4$$

Και άρα

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2.

• Σε μια ασφαλιστική εταιρία (αυτοκινήτων) οι ασφαλιζόμενοι κατηγοριοποιούνται σε 4 καταστάσεις οι οποίες καθορίζουν και το ύψος των ασφαλίστων.

• Κάθε χρόνο ο ασφαλιζόμενος αλλάζει κατάσταση σύμφωνα με το πλήθος των ατυχημάτων που έκανε τον προηγούμενο χρόνο (*Bonus-Malus system*):

		Μετάβαση από την κατάσταση i στην j αν ο ασφαλιζόμενος έχει x ατυχήματα το προηγούμενο έτος			
Κατάσταση	*Ασφάλιστρο*	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x \geq 3$
$i = 1$	200	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
$i = 2$	250	$j = 1$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 4$
$i = 3$	400	$j = 2$	$j = 4$	$j = 4$	$j = 4$
$i = 4$	600	$j = 3$	$j = 4$	$j = 4$	$j = 4$

• Αν π.χ. ένας ασφαλιζόμενος βρίσκεται στην κατάσταση $i = 1$ και μέσα στο έτος ζητήσει αποζημίωση για 2 ατυχήματα τότε το επόμενο έτος θα βρεθεί στην κατάσταση $j = 3$.

• Αν υποθέσουμε ότι το πλήθος των απαιτήσεων ζημιάς από τον ασφαλισμένο στην διάρκεια ενός έτους ακολουθεί την κατανομή Poisson με ένταση λ τότε η πιθανότητα να απαιτήσει k αποζημιώσεις θα είναι

$$a_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, k = 0,1,...$$

• Αν η τ.μ. X_n εκφράζει την κατάσταση του ασφαλισμένου το n έτος τότε η

$$\{X_n, n = 1, 2, ...\}$$

είναι Μαρκοβιανή Αλυσίδα με πίνακα πιθανοτήτων μεταπήδησης

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 1-a_0-a_1-a_2 \\ a_0 & 0 & a_1 & 1-a_0-a_1 \\ 0 & a_0 & 0 & 1-a_0 \\ 0 & 0 & a_0 & 1-a_0 \end{bmatrix}$$

2.2. Πιθανότητες μεταπήδησης *n* τάξης

• Η πιθανότητα η Μαρκοβιανή αλυσίδα να βρεθεί στην κατάσταση *j* μετά από *n* βήματα, δεδομένου ότι σήμερα βρίσκεται στην κατάσταση *i* συμβολίζεται με

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i),$$

• Ο πίνακας πιθανοτήτων μεταπήδησης *n* τάξης θα είναι

$$\mathbf{P}^{(n)} = \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \cdots & p_{0j}^{(n)} & \cdots \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & & p_{1j}^{(n)} & \\ \vdots & & \ddots & & \\ p_{i0}^{(n)} & p_{i1}^{(n)} & & p_{ij}^{(n)} & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

• Ισχύει ότι

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = j, X_{n-1} = k \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = j \mid X_{n-1} = k, X_0 = i) P(X_{n-1} = k \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = j \mid X_{n-1} = k) P(X_{n-1} = k \mid X_0 = i) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{kj} p_{ik}^{(n-1)}$$

και επομένως, η παραπάνω σχέση γράφεται με τη μορφή πινάκων

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(n-1)} \cdot \mathbf{P}$$

• Από την παραπάνω αναδρομικά προκύπτει ότι

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(n-1)} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}^{(n-2)} \cdot \mathbf{P}^2 = \ldots = \mathbf{P}^n$$

και άρα

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{P}^n \cdot \mathbf{e}'_j\,,$$

όπου $\mathbf{e}_i = (0,....,0,1,0,...,0)$ (το 1 στην *i*-θέση).

2.3. Μαρκοβιανές Αλυσίδες συνεχούς χρόνου

- Η έννοια της Μαρκοβιανής αλυσίδας μπορεί να εκφραστεί και σε συνεχή χρόνο:

- Έστω στοχαστική ανέλιξη $\{X_t, t \geq 0\}$ με τιμές (καταστάσεις) και πάλι στο $\{0,1,\ldots\}$. Αν ικανοποιεί την ιδιότητα:

$$P(X_{s+t} = j \mid X_s = i, X_u = i_u, u < s) = P(X_{s+t} = j \mid X_s = i)$$

για όλες τις καταστάσεις j, i, i_u και για όλους τους χρόνους t,s τότε καλείται *Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου*.

- Και πάλι, ισχύει ότι (Μαρκοβιανή Ιδιότητα):

η κατάσταση που θα βρεθεί η αλυσίδα στο μέλλον ($X_{t+s} = j$) *επηρεάζεται μόνο από την κατάσταση που έχει στο παρόν* ($X_s = i$) *και όχι από το παρελθόν* ($X_u = i_u$, $u < s$).

- Οι πιθανότητες μετάβασης (σε χρόνο t) τώρα θα είναι

$$p_{ij}^{(t)} = P(X_{s+t} = j \mid X_s = i)$$

- Αν h μικρό, για τις πιθανότητες μετάβασης σε χρόνο h, ισχύει

$$p_{ij}^{(h)} = q_{ij} h + o(h) \quad (i \neq j)$$

- Η ποσότητα q_{ij} καλείται ρυθμός μετάβασης από την i στην j κατάσταση.

- Αποδεικνύεται ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα παραμένει σε μια κατάσταση i (πριν μεταβεί σε κάποια άλλη) χρόνο που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο

$$q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$$

- Μόλις λήξει ο παραπάνω χρόνος η αλυσίδα μεταβαίνει στην κατάσταση j ($\neq i$) με πιθανότητα

$$p_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}$$

• Επομένως σε συνεχή χρόνο, η συμπεριφορά της αλυσίδας καθορίζεται μονοσήμαντα από τον πίνακα (ρυθμών μετάβασης):

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -q_0 & q_{01} & \cdots & q_{0j} & \cdots \\ q_{10} & -q_1 & & q_{1j} & \\ \vdots & & \ddots & & \\ q_{i0} & q_{i1} & & -q_i & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

(οι γραμμές του αθροίζουν στο 0)

Παράδειγμα 1 (*διαδικασία γέννησης*). Έστω ότι

$$q_{i,i+1} = \lambda \quad \text{και} \quad q_{ij} = 0 \text{ διαφορετικά},$$

δηλαδή η κατάσταση μπορεί μόνο να αυξάνεται κατά 1 με ρυθμό λ.

• Σε αυτή την περίπτωση η αλυσίδα παραμένει εκθετικό χρόνο (λ) στην κατάσταση i και μεταβαίνει στην κατάσταση i+1 με πιθ. $p_{i,i+1} = q_{i,i+1} / q_i = \lambda / \lambda = 1$.

• Επομένως πρόκειται για την ανέλιξη Poisson που εξετάσαμε παραπάνω.

Παράδειγμα 2 (*διαδικασία γέννησης - θανάτου*). Έστω τώρα ότι

$$q_{i,i+1} = \lambda, \quad q_{i,i-1} = \mu \quad \text{και} \quad q_{ij} = 0 \text{ διαφορετικά}.$$

δηλαδή η X μπορεί να αυξάνεται κατά 1 με ρυθμό λ ή να μειώνεται κατά 1 με ρυθμό μ.

• Σε αυτή την περίπτωση η αλυσίδα παραμένει εκθετικό χρόνο (λ+μ) στην κατάσταση i και μεταβαίνει

- στην κατάσταση $i + 1$ με πιθ. $p_{i,i+1} = q_{i,i+1} / q_i = \lambda / (\lambda + \mu)$ ή
- στην κατάσταση $i - 1$ με πιθ. $p_{i,i-1} = q_{i,i-1} / q_i = \mu / (\lambda + \mu)$

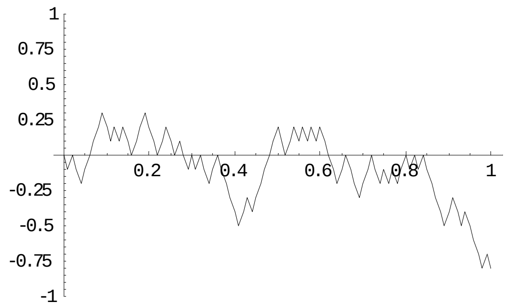
3.1 Κίνηση Brown

• Έστω $\{X_s, s \geq 0\}$ μια στοχαστική ανέλιξη συνεχούς χρόνου. Χωρίζουμε το χρονο $[0, t]$ σε n διαστήματα πλάτους $h = t/n$ και σε καθένα από αυτά θεωρούμε ότι η X_s αυξάνεται ή μειώνεται ως εξής

$$X_{ih} = \begin{cases} X_{(i-1)h} + \sigma\sqrt{h}, & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta.\ p \\ X_{(i-1)h} - \sigma\sqrt{h}, & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta.\ 1-p \end{cases} \quad \text{όπου} \quad p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{h}\right),\ i = 1,2,\ldots,n.$$

για κάποιες παραμέτρους μ, σ (υποθ. ότι στα διαστήματα $((i-1)h, ih)$ η ανέλιξη κινείται γραμμικά)

• Μια πραγματοποίηση του παραπάνω θα είναι της μορφής:

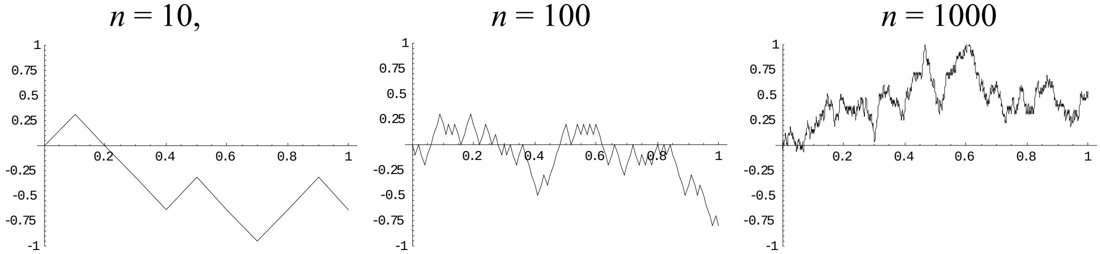


(*ανελίξεις που κινούνται τυχαία πάνω ή κάτω καλούνται τυχαίοι περίπατοι*).

• Μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε το όριο της παραπάνω ανέλιξης όταν το $n \to 0$, δηλαδή κατάλληλο όριο τυχαίου περιπάτου

• Αν αυξήσουμε το n (πλήθος υποδιαστημάτων που κινείται η παραπάνω ανέλιξη) τότε λαμβάνουμε τις πραγματοποιήσεις της μορφής:

$n = 10$, $n = 100$ $n = 1000$



• Οριακά, σε πεπερασμένα χρονικά διαστήματα, η ανέλιξη θα πραγματοποιεί άπειρο πλήθος βημάτων, το καθένα απειροστού μήκους.

• Θέτουμε Y_i = 1 ή 0 αν η X αυξάνεται ή μειώνεται στο i χρονικό διάστημα. Θα ισχύει για σταθερό $t = nh$ ότι

$$X_t = X_{nh} = \sigma\sqrt{h}\sum_{i=1}^{n} Y_i - \sigma\sqrt{h}(n - \sum_{i=1}^{n} Y_i)$$

$$\underset{h=t/n}{=} 2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}\sum_{i=1}^{n} Y_i - n\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}$$

$$= 2\sigma\sqrt{tp(1-p)}\,\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} + \sigma\sqrt{nt}\left(2p-1\right)$$

$$\to_{n\to\infty}\ \sigma\sqrt{t}\cdot Z + t\mu$$

όπου $Z \sim$ N(0,1), δηλαδή,

$$\boxed{X_t \sim N(t\mu, t\sigma^2)\,.}$$

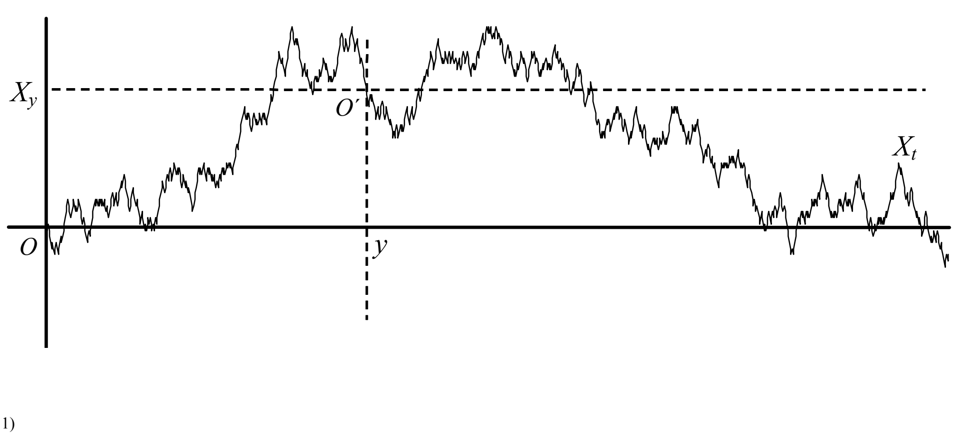
• Παρατηρούμε ότι, η ανέλιξη που προκύπτει (όταν $h \to 0$) έχει

(1) ***Ανεξάρτητες προσαυξήσεις***: $X_{t+y} - X_y$ ανεξ. από τις X_u, $0 \le u \le y$.

Διότι σε κάθε απειροστό χρονικό διάστημα, η αύξηση ή η μείωση της X_t είναι ανεξάρτητη από το παρελθόν, και άρα η τ.μ. $X_{t+y} - X_y$, $t > 0$ θα είναι ανεξάρτητη από τις X_u, $0 \le u \le y$.

(2) ***Κανονικές προσαυξήσεις***: $X_{t+y} - X_y \sim N(\mu t, t\sigma^2)$

Είδαμε ότι $X_t \sim N(t\mu, t\sigma^2)$ και επομένως και $X_{t+y} - X_y \sim N(\mu t, t\sigma^2)$ για κάθε $y \ge 0$.



• Ο τρόπος με τον οποίο «ορίσαμε» την παραπάνω ανέλιξη δεν είναι αυστηρός. Αποδεικνύεται όμως ότι πράγματι υπάρχει και μπορεί να οριστεί μια ανέλιξη με τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά (*ανεξάρτητες, κανονικές προσαυξήσεις*).

• Ειδικότερα έχουμε τον ακόλουθο αυστηρό ορισμό:

Ορισμός. *Μία στοχ. ανέλιξη* X_t, $t \geq 0$ *καλείται* ***κίνηση Brown*** BM(μ, σ^2) *με παραμέτρους*

$\mu \in R$ (*τάση - drift parameter*) *και* $\sigma > 0$ (*μεταβλητότητα - volatility*)

αν ισχύει ότι, για κάθε $y \geq 0$, $t > 0$,

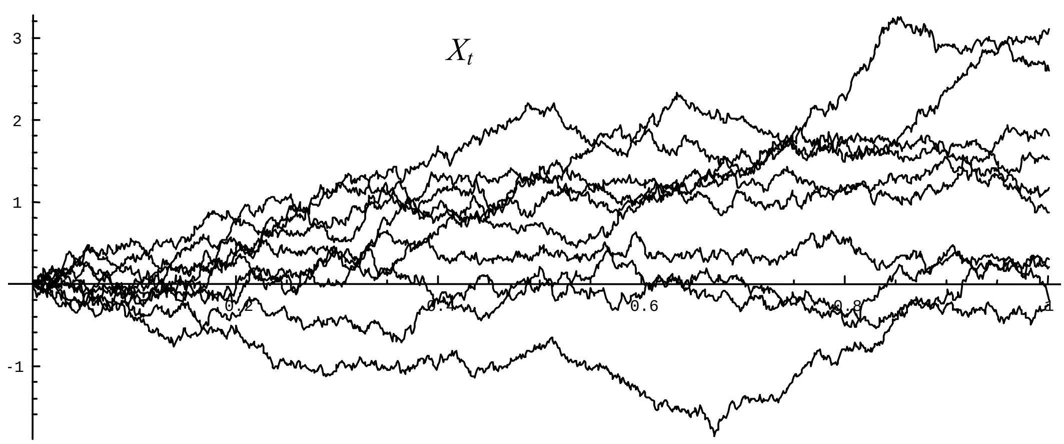
(1) *Η τ.μ.* $X_{t+y} - X_y \sim N(\mu t, t\sigma^2)$.

(2) *Η τ.μ.* $X_{t+y} - X_y$, *είναι ανεξάρτητη από τις* X_u, $0 \leq u \leq y$

Συνήθως λαμβάνεται $X_0 = 0$.

• Γενικότερα, ανελίξεις με *ανεξάρτητες* και *ισόνομες* (όχι κατ' ανάγκη κανονικές) προσαυξήσεις, καλούνται **ανελίξεις Lévy** (π.χ. η διαδικασία Compound Poisson που μελετήσαμε παραπάνω είναι ανέλιξη Lévy).

• Π.χ. 10 τυχαίες διαδρομές (paths) μιας κίνησης Brown με μ = 1, σ = 1 ($t \in [0,1]$) είναι



• Εδώ π.χ.

- $X_{0.5} \sim N(0.5\mu, 0.5\sigma^2) = N(0.5, 0.5)$, $X_1 \sim N(1\mu, 1\sigma^2) = N(1, 1)$
- η $X_1 - X_{0.5} \sim N(0.5, 0.5)$ και είναι ανεξάρτητη της $X_{0.5}$

κ.ο.κ.

• Αποδεικνύεται ότι η κίνηση Brown είναι η μοναδική στοχαστική ανέλιξη σε συνεχή χρόνο που

(i) οι διαδρομές της $g_\omega(t) = X_t(\omega)$ είναι *συνεχείς συναρτήσεις* και

(ii) έχει *ανεξάρτητες και ισόνομες προσαυξήσεις*.

• Υπάρχουν και άλλες ανελίξεις με *ανεξάρτητες και ισόνομες προσαυξήσεις* – οι ανελίξεις Levy – αλλά, εκτός της κίνησης Brown, δεν είναι συνεχείς, παρουσιάζουν άλματα (*απαιτείται μόνο να είναι δεξιά συνεχείς*).

• Μία διαδρομή της κίνησης Brown είναι ***συνεχής*** συνάρτηση του t, αλλά δεν είναι ***πουθενά παραγωγίσιμη***.

(σε διάστημα μήκους h, η ανέλιξη κινείται πάνω ή κάτω κατά $\sigma h^{1/2}$, δηλαδή η «παράγωγος» της στο διάστημα αυτό θα είναι ίση με $\sigma h^{1/2}/h = \sigma h^{-1/2} \to \infty$ όταν το $h \to 0$. Επιπλέον, η ανέλιξη αλλάζει τυχαία κλίση σε κάθε απειροστό διάστημα)

3.2. Η Γεωμετρική Κίνηση Brown

• Η κίνηση Brown δεν είναι κατάλληλη για να περιγράψει την εξέλιξη τιμών αγαθών ή μετοχών διότι

(i) μπορεί να λάβει και αρνητικές τιμές,

(ii) η αυξομείωση μιας τιμής είναι, σύμφωνα με την κίνηση Brown, ανεξάρτητη από την ίδια την τιμή διότι πρόκειται για προσθετικό μοντέλο (π.χ. είναι το ίδιο πιθανό το ενδεχόμενο «η τιμή 100 να κινηθεί στο 100+10=110 σε διάστημα μήκους h» με το ενδεχόμενο «η τιμή 10 να κινηθεί στο 10+10=20 σε διάστημα μήκους h»)

• Αντίθετα, θα περίμενε κανείς

(i) η ανέλιξη να μην μπορεί να λάβει αρνητικές τιμές,

(ii) η *ποσοστιαία* αυξομείωση μιας τιμής να είναι ανεξάρτητη από την τιμή (δηλαδή το 100 κινείται στο $100\times1.1=110$ με την ίδια πιθανότητα που το 10 κινείται στο $10\times1.1=11$).

• Χρειαζόμαστε επομένως ένα ***πολλαπλασιαστικό μοντέλο***.

• Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η τιμή S_t μπορεί να αυξηθεί ή να μειωθεί ως εξής:

$$S_{ih} = \begin{cases} S_{(i-1)h}e^{\sigma\sqrt{h}}, & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta.\ p \\ S_{(i-1)h}e^{-\sigma\sqrt{h}}, & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta.\ 1-p \end{cases} \qquad \text{όπου} \qquad p = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta}\right).$$

• Δηλαδή, η *ποσοστιαία* μείωση ή αύξηση της τιμής $S_{ih}/S_{(i-1)h}$ σε κάθε *απειροστό* διάστημα χρόνου είναι *σταθερή* και *ανεξάρτητη* από το παρελθόν.

• Αν θέσουμε $X_t = \ln S_t$, τότε $X_{ih} = X_{(i-1)h} \pm \sigma h^{1/2}$ και επομένως η ανέλιξη $X_t = \ln S_t$ $t \geq 0$ είναι μια κίνηση Brown.

• Μια ανέλιξη με τις παραπάνω ιδιότητες (*ο λογάριθμός της είναι μία κίνηση Brown*) καλείται *γεωμετρική κίνηση Brown*.

• Αν $\{X_t, t \geq 0\}$ ~ *Brownian motion* (μ,σ^2) τότε η

$$\{\, S_t = e^{X_t},\ t \geq 0\} \sim \textit{Geometric Brownian motion}\ (\mu,\sigma^2)$$

• Μία διαδρομή της S_t, $t \geq 0$ ~ GBM(μ,σ^2) είναι και πάλι μία ***συνεχής*** συνάρτηση του t η οποία δεν είναι ***πουθενά παραγωγίσιμη***.

• Αν S_t, $t \geq 0$ ~ GBM(μ, σ^2) τότε η S_t (για συγκεκριμένο t) ακολουθεί τη λογαριθμοκανονική κατανομή, δηλαδή ο λογάριθμός της ακολουθεί την κανονική κατανομή,

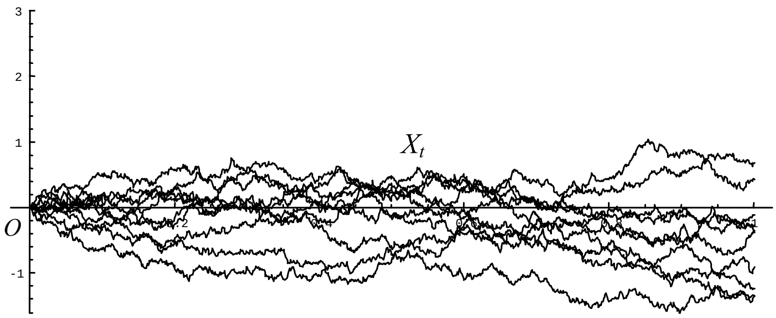
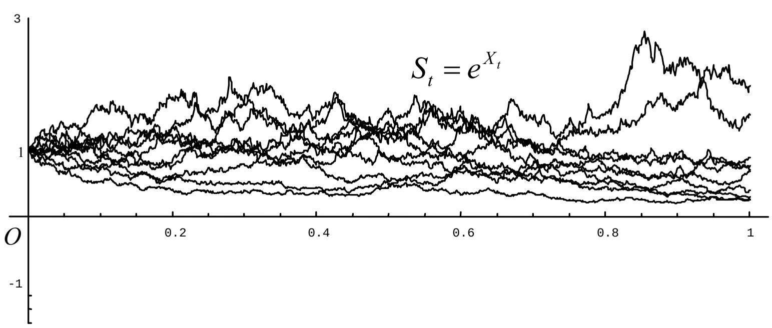
$$\ln S_t \sim N(t\mu, t\sigma^2),$$

και επομένως, οι ροπές k τάξης της τ.μ. S_t θα είναι

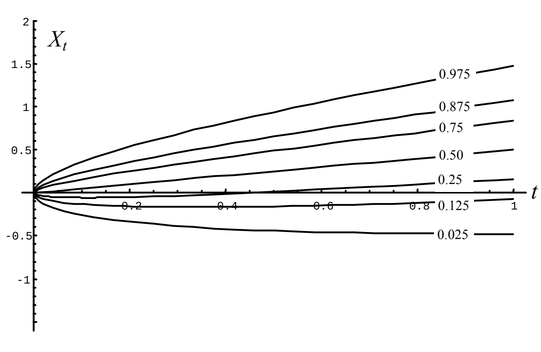
$$E(S_t^k) = E((e^{\ln S_t})^k) = E((e^{\sigma\sqrt{t}Z+t\mu})^k) = e^{kt\mu}E(e^{k\sigma\sqrt{t}Z}) \qquad (Z \sim \mathrm{N}(0,1))$$

Αλλά, $E(e^{uZ}) = e^{\frac{1}{2}u^2}$, και συνεπώς, $E(S_t^k) = e^{kt\mu+\frac{1}{2}k^2t\sigma^2}$ από όπου προκύπτει ότι

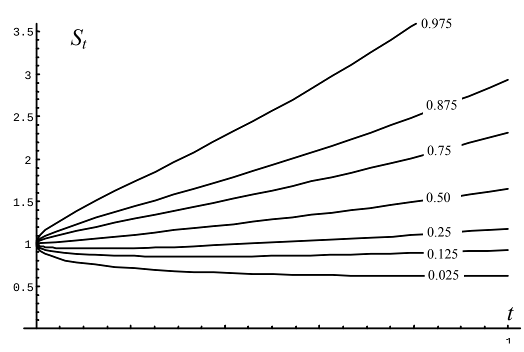
$$E(S_t) = e^{t\mu+\frac{1}{2}t\sigma^2}, \quad V(S_t) = E(S_t^2) - E(S_t)^2 = e^{2t(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2)}(e^{t\sigma^2}-1).$$

10 πραγματοποιήσεις *κίνησης Brown* X_t, $t\in[0, 1]$, μ=–0.1, σ=0.8	
	$X_1 \sim$ N(–0.1, 0.64),
10 πραγματοποιήσεις της αντίστοιχης *GBM*, $S_t = e^{X_t}$, $t\in[0,1]$. 	$S_1 \sim$ LN $E(S_1) = e^{1\cdot(-0.1+\frac{1}{2}0.8^2)}$ ≈ 1.246 $V(S_1) = e^{0.44}(e^{0.64}-1)$ ≈ 1.083

• Για κάποιο $t\in[0,1]$, η X_t (αντίστοιχα η S_t) βρίσκεται κάτω από τις καμπύλες στο αριστερό σχήμα (αντ. δεξιό) με πιθανότητες 0.025, 0.125, 0.25, 0.5, 0.75, 0.875, 0.975 αντίστοιχα.



$X_t \sim$ BM(μ = 0.5, σ = 1)



$S_t \sim$ GBM(μ = 0.5, σ = 1)

• **Άσκηση 1.** Αν μια στοχαστική ανέλιξη X_t, $t \geq 0$ είναι κίνηση Brown με παράμετρο τάσης μ και μεταβλητότητα σ (και $X_0 = 0$), ποια κατανομή ακολουθούν οι τυχαίες μεταβλητές X_3, $X_6 - X_4$, $X_7 - X_1$. Είναι κάποιες από αυτές ανεξάρτητες μεταξύ τους και γιατί;

Λύση. Γνωρίζουμε ότι $X_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$ και επίσης $X_{t+y} - X_y \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$. Επομένως

$$X_3 \sim N(3\mu, 3\sigma^2),\; X_6 - X_4 \sim N(2\mu, 2\sigma^2),\; X_7 - X_1 \sim N(6\mu, 6\sigma^2)\,.$$

Επίσης οι δύο τ.μ. $X_3 = X_3 - X_0$ και $X_6 - X_4$ είναι ανεξάρτητες διότι αποτελούν προσαυξήσεις της κίνησης Brown σε ξένα χρονικά διαστήματα.

• **Άσκηση 2.** Αν X_t, $t \geq 0 \sim$ BM(0,1) τότε $E(X_t \cdot X_s) = \min\{s,t\}$ για $s \geq 0$, $t \geq 0$.

Λύση. Αν $t > s$ τότε (χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η κίνηση Brown έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις)

$$E(X_t X_s) = E((X_t - X_s)X_s + X_s^2) = E((X_t - X_s)X_s) + E(X_s^2)$$
$$= E(X_t - X_s)E(X_s) + E(X_s^2) = 0 + E(X_s^2) = V(X_s) = s$$

και όμοια, αν $s > t$ τότε $E(X_t X_s) = t$. Επίσης $E(X_t X_t) = V(X_t) = t$ και επομένως γενικά ισχύει το ζητούμενο.

• **Άσκηση 3**. Αν η ανέλιξη της αξίας μιας μετοχής S_t, $t\in[0,T]$ στο χρονικό διάστημα $[0,T]$, $T > 1$ (ο χρόνος μετράται σε έτη), περιγράφεται από μια γεωμετρική κίνηση Brown με παραμέτρους μ = 0.3 (drift) και σ = 0.1 (volatility), να βρείτε την αναμενόμενη αξία της μετοχής στο χρόνο $t = 3/12$ (τρείς μήνες) και την πιθανότητα να είναι μεγαλύτερη από 110 (σήμερα, $t = 0$, έχει αξία $S_0 = 100$).

Λύση. Αν $Z \sim N(0,1)$, η αναμενόμενη αξία της μετοχής στο χρόνο $t = 3/12$ θα είναι

$$E(S_t) = E(S_0 e^{t\mu+\sigma\sqrt{t}Z}) = S_0 e^{t\mu} E(e^{\sigma\sqrt{t}Z}) = S_0 e^{t\mu+\sigma^2 t/2} = 100 e^{\frac{3}{12}0.3+0.1^2 0.3/2} \approx 107.95$$

Η πιθανότητα που ζητείται είναι

$$P(S_t > x) = P(S_0 e^{t\mu+\sigma\sqrt{t}Z} > x) = P(Z > \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}(\ln\frac{x}{S_0} - t\mu)) = 1 - \Phi(\frac{1}{\sigma\sqrt{t}}(\ln\frac{x}{S_0} - t\mu))$$

$$= 1 - \Phi(\frac{1}{0.1\sqrt{3/12}}(\ln\frac{110}{100} - \frac{3}{12}0.3)) \approx 1 - \Phi(0.406204) \approx 0.342297$$

Martingales

• Μια στοχαστική ανέλιξη $\{X_i, i = 0,1,\ldots\}$ με $E(|X_i|) < \infty$, *καλείται* ***martingale*** *αν*

$$E(X_{n+1} \mid X_1, X_2, \ldots, X_n) = X_n, \quad n = 1, 2, \ldots \text{ με πιθανότητα } 1$$

(με ≥ *submartingale ενώ αν με ≤ supermartingale*).

• Αν π.χ. X_i είναι το κέρδος από την συμμετοχή μας σε ένα τυχερό παιχνίδι στο χρόνο i, το αναμενόμενο κέρδος στο χρόνο $n + 1$ όταν θα βρισκόμαστε στο χρόνο n («υπολογισμένο» στο χρόνο n), είναι ίσο με $E(X_{n+1} \mid X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

- Εάν η $\{X_i, i = 0,1,\ldots\}$ είναι martingale τότε το παραπάνω αναμενόμενο κέρδος θα είναι ίσο με το κέρδος X_n μέχρι και τον χρόνο n, ή ισοδύναμα,

$$E(X_{n+1} - X_n \mid X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0$$

Ένα τέτοιο τυχερό παιχνίδι καλείται «δίκαιο».

• Για μια martingale ακολουθία $X_1, X_2,\ldots$ ισχύει ότι

$$E(X_{n+1}) = E(X_n) = \ldots = E(X_1)$$

- *προκύπτει λαμβάνοντας μέσες τιμές στην σχέση* $E(X_{n+1} \mid X_1, X_2, \ldots, X_n) = X_n$

• Για μια martingale ακολουθία $X_1, X_2,\ldots$ αποδεικνύεται εύκολα ότι

$$E(X_{n+k} \mid X_1, X_2, \ldots, X_n) = X_n,\ k = 1,2,\ldots .$$

• **Παράδειγμα 1.** Έστω $Y_1, Y_2,\ldots$ ανεξάρτητες τ.μ. με $E(Y_i) = 0$. Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$$X_1 = Y_1,\quad X_2 = Y_1 + Y_2,\quad X_3 = Y_1 + Y_2 + Y_3,\ \ldots$$

είναι martingale (αρκεί $E(|X_i|) < \infty$). (π.χ. $Y_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$)

- ***Απόδειξη***:

$$E(X_{n+1} \mid X_1, X_2, \ldots, X_n) = E(X_n + Y_{n+1} \mid X_1, X_2, \ldots, X_n),$$

$$= E(X_n \mid X_1, X_2, \ldots, X_n) + E(Y_{n+1} \mid X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

$$= X_n + E(Y_{n+1}) = X_n .$$

• Τα παραπάνω μεταφράζονται και σε συνεχή χρόνο:

(ii) *Μία στοχαστική ανέλιξη* $\{X_t, t \geq 0\}$ *θα καλείται martingale* αν $E(|X_t|) < \infty$, *και*

$$E(X_t \mid X_u, u \leq s) = X_s, \quad s \leq t$$

με πιθ. 1

• *Αν π.χ. η* $\{W_t, t \geq 0\}$ *είναι* κίνηση Brown *τότε κάθε μία από τις ανελίξεις*

$$\text{(i) } W_t, t \geq 0, \quad \text{(ii) } W_t^2 - t, \; t \geq 0, \quad \text{(iii) } e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t}, \; t \geq 0.$$

είναι martingale.

Χρόνος διακοπής (*stopping time*).

• Έστω μία στοχαστική ανέλιξη $\{X_i, i = 0,1,\ldots\}$. Μία τ.μ. T με τιμές στο $\{0,1,\ldots\}$ καλείται *χρόνος διακοπής* (σε σχέση με την ακολουθία X_i, $i = 0,1,\ldots$) αν το ενδεχόμενο

$$[T = n]$$

καθορίζεται από τις $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (δηλαδή το αν θα πραγματοποιηθεί ή όχι καθορίζεται από τις $X_1, X_2, \ldots, X_n$), για κάθε $n = 1, 2, \ldots$.

Παράδειγμα 1. $X_1, X_2, \ldots$ είναι η τιμή μιας μετοχής (κατά την λήξη των διαδοχικών συνεδριάσεων του χρηματιστηρίου) και ένας επενδυτής αποφασίζει να προβεί σε μια ενέργεια με βάση την τιμή αυτής της μετοχής (π.χ. όταν η τιμή ανέβει πάνω από ένα όριο ή όταν για 3 διαδοχικές ημέρες η τιμή ανεβαίνει).

- Ο χρόνος T πραγματοποίησης της ενέργειας αυτής είναι χρόνος διακοπής

Παράδειγμα 2. $X_1, X_2, \ldots$ είναι η τιμές μιας στατιστικής συνάρτησης από διαδοχικά δείγματα που λαμβάνονται ακολουθιακά από έναν πληθυσμό. Ένας ερευνητής αποφασίζει να δεχτεί ή να απορρίψει μια υπόθεση σχετικά με τον πληθυσμό όταν σε κάποιο βήμα οι τιμές της στατιστικής συνάρτησης που έχει λάβει έως εκείνο το βήμα ικανοποιούν κάποιες συνθήκες.

- Ο χρόνος T λήψης της απόφασης (και τερματισμού της διαδικασιας δειγματοληψιών) είναι χρόνος διακοπής

Ισότητα του Wald

Αν X_1, X_2, … είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $E(|X|) < \infty$ και T είναι ένας χρόνος διακοπής (με $E(T) < \infty$), τότε

$$E\left(\sum_{i=1}^{T} X_i\right) = E(T)E(X)$$

• Η παραπάνω ισχύει προφανώς όταν η τ.μ. T είναι ανεξάρτητη των X_i (όπως π.χ. στην ανέλιξη σύνθετη Poisson). Η παραπάνω ισότητα όμως ισχύει για το χρόνο διακοπής T που *εξαρτάται* από τα X_i.

Παράδειγμα. Έστω $X_0, X_1, \ldots$ ένας τυχαίος περίπατος ο οποίος ξεκινά από το 0 ($X_0 = 0$) και κινείται κατά μία μονάδα πάνω ή κάτω με πιθ. $p > 1/2$ και $1 - p$ αντίστοιχα (ανεξ. από το παρελθόν). Να βρεθεί ο μέσος αριθμός βημάτων μέχρι να βρεθεί ο περίπατος στην θέση $k > 0$.

- Επειδή $\sum_{i=1}^{T} X_i = k$, από την ισότητα του Wald,

$$E\left(\sum_{i=1}^{T} X_i\right) = E(T)E(X) \Rightarrow E(T) = \frac{k}{E(X)} = \frac{k}{2p-1}$$